① การแทน Signals ในรูปของ Fourier (A2.X)

Fourier Analysis

ให้ $g(t)$ เป็นสัญญาณ non periodic deterministic signal ในรูปฟังก์ชัน t

Fourier Transform:

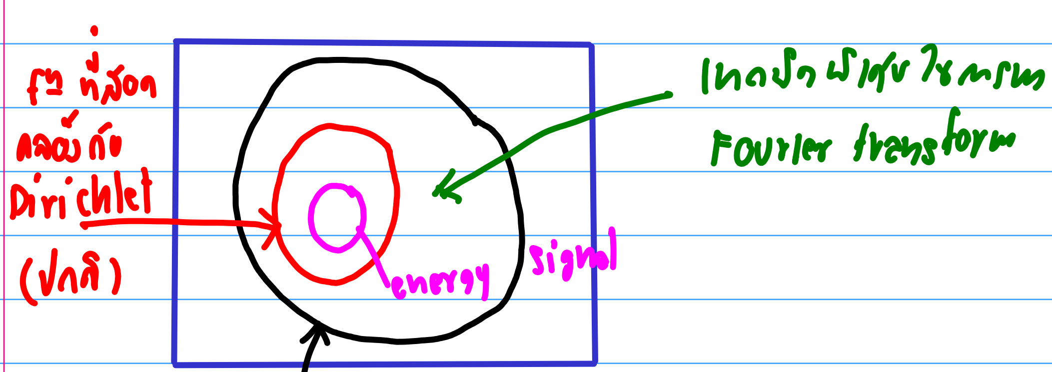
$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

เมื่อ $j = \sqrt{-1}$

Inverse Fourier Transform:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

ไม่ทุกฟังก์ชันของ $g(t)$ ที่มี Fourier transform



เซตของ f^n ที่มี Fourier transform

เงื่อนไขของ Dirichlet มี 3 ข้อ ที่ไม่ขอกล่าวถึงในที่นี้

อย่างไรก็ตาม นักวิทยาศาสตร์พบว่า ทุก energy signal,

$g(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$$

มี Fourier transform

Ex

a) $g(t) = \begin{cases} t^2, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$

จะพบว่า $g(t)$ เป็น energy signal เนื่องจาก

$$\int_{-1}^{1} |t^2|^2 dt = \frac{2}{5} < \infty$$

จึงมี Fourier transform แน่นอน

b)

$$g(t) = \sin t, \quad -\infty < t < \infty$$

จะพบว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sin t|^2 dt \rightarrow \infty$$

จึงไม่เป็น energy signal ไม่มี Fourier transform ตามวิธีปกติ

#

Propertys ของ Fourier transform

เพราะบางแนวคิดของการประยุกต์ Fourier transform ใน fn ที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของ Dirichlet จึงทำได้ 2 วิธี (ในชั้นเรียน)

1. รวม Fourier Series และ Fourier transform เข้าไปใน Theory เพื่อให้ Fourier series เป็นกรณีหนึ่งใน Fourier transform

2. รวม power signal ให้อยู่ใน list ของ signals ที่เราสามารถประยุกต์ Fourier transform ได้

ทั้ง 2 วิธี จำเป็นต้องใช้ Dirac delta fn (หรือ unit pulse)

Dirac delta fn $\triangleq \delta(t)$ มีนิยามเป็น

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

time-shift delta fn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\delta(t-t_0)\, dt = g(t_0) \qquad *$$

และเนื่อง delta fn เป็น even fn จึงได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = g(t)$$

Fourier Transform ของ Periodic Signal

ให้ $g_{T_0}(t)$ เป็น a periodic signal ที่มี Period, T_0

ดังนั้น เราสามารถแทน $g_{T_0}(t)$ ในรูป complex exponential

Fourier series:

$$g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_0 t) \qquad (A2.7)$$

เมื่อ $c_n \triangleq$ complex Fourier coefficient นิยามเป็น

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_{T_0}(t)\exp(-j2\pi n f_0 t)\,dt$$

และ $f_0 \triangleq$ fundamental frequency $= \frac{1}{T_0}$

ให้

$$g(t) = \begin{cases} g_{T_0}(t), & -\frac{T_0}{2} < t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \Bigg\} \text{ energy signal}$$

และเราสามารถแทน $g_{T_0}(t)$ ด้วย

$$g_{T_0}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT_0) \qquad (A2.11)$$

และได้

$$c_n = \overbrace{f_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\exp(-j2\pi \overbrace{nf_0}^{f} t)\,dt}^{\text{Fourier transfor ของ } g(t)}$$

$$= f_0 \underbrace{G(nf_0)}_{\text{Fourier transform ของ } g(t) \text{ ณ } nf_0}$$

ดังนั้น (จาก A2.7) ได้

$$g_{T_0}(t) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(nf_0)\exp(j2\pi n f_0 t) \qquad (A2.13)$$

จาก (A2.11) และ (A2.13) ได้

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \underbrace{g(t - mT_0)}_{\text{signal}} = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{G(nf_0)}_{\text{spectrum}}\exp(j2\pi n f_0 t) \qquad (A2.14)$$

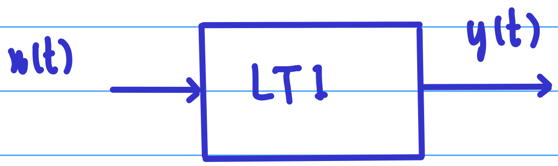
periodic signal $\rightarrow$ ได้ spectrum เป็น พหุคูณ ของ ความถี่มูลฐาน บวกกัน

Transmission สัญญาณ ผ่าน ระบบ linear

$\overbrace{\text{System}}^{f}$ หมายถึง physical device ที่ ตอบสนองต่อ input signal ด้วยการผลิต output signal

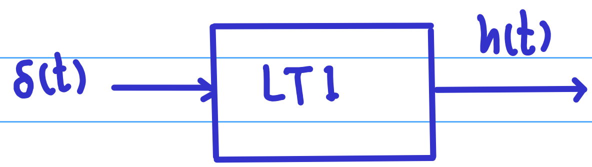
$$\text{linear}: \begin{cases} f(at) = af(t) \\ f(at_1 + bt_2) = af(t_1) + bf(t_2) \end{cases}$$

$h(t)$ - impulse response ของระบบ



ได้ $$y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau}_{\text{Convolution Integral}} \qquad (A\,2.15)$$

เมื่อ



เนื่องจาก Convolution integral เป็น ฟข คู่

จึงได้

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \qquad (A\,2.16)$$

เนื่องจาก เราสามารถประยุกต์ใช้ Fourier transform ของ $h(t)$

ในระบบ นั่นคือ

$$\underset{\sim}{H(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j2\pi f t)\, dt$$

frequency response
ของ LTI system

Bandwidth

① ถ้า time domain ของ สัญญาณ เปลี่ยน แล้ว

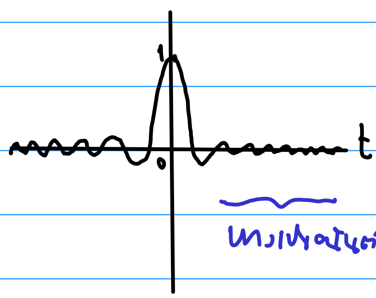
frequency domain เปลี่ยน ในทางตรงข้าม

② time-domain มีหางที่เป็นอนันต์

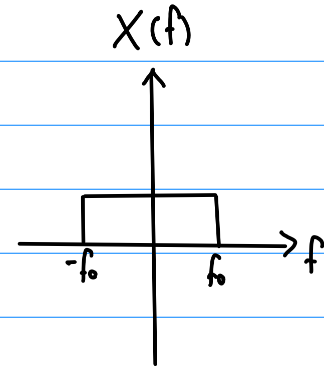
ก็ต่อเมื่อ frequency domain จะเป็น

band limit.

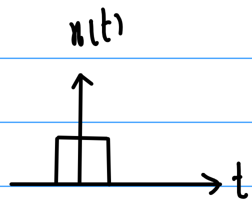
Ex $x(t) = \text{sinc}(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$



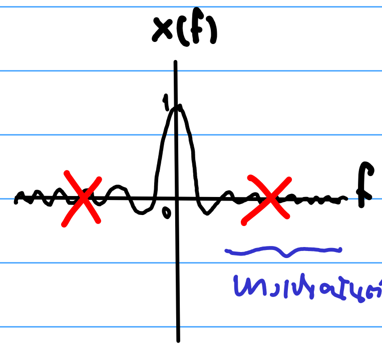
$\overset{FT}{\Longleftrightarrow}$



Ex

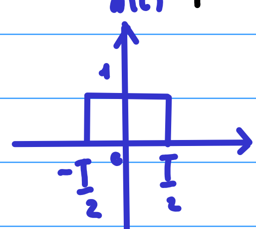


$\Leftrightarrow$



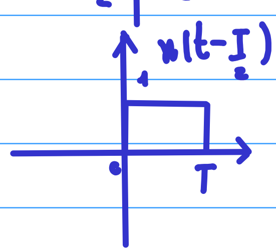
Fourier transform ดู ตาราง A6.3 , A 6.2

$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow T\,\text{sinc}(fT)$



Ex

$\text{rect}\left(\frac{t}{1}\right) \Leftrightarrow 1\,\text{sinc}(f1)$



$x(t-\frac{T}{2}) \overset{A6.2}{\Leftrightarrow} X(f)\exp(-j2\pi f\frac{T}{2})$

$\text{sinc}(fT)\exp(-j2\pi f\frac{T}{2})$