ทบทวน Probability: Statistical Average
Random Processes

ใน probability เรามักเกี่ยวข้องกับการอธิบาย r.v. ในรูป
ค่าเฉลี่ย (average) ของ outcome ที่ได้จากการทดลองสุ่ม

เรานิยามให้ expected value หรือ mean ของ r.v. X

หาพบดัง

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx \qquad (A1.27)$$

เมื่อ E แทน statistical expectation operator

ถ้า X แทน a r.v. และ g(X) แทนฟังก์ชัน X ที่
มีค่าบนเส้นจำนวนจริง แล้ว g(X) เป็น a r.v. และ
เขียนแทนด้วย $Y = g(X)$

เราสามารถหา expected value ของ Y ได้เป็น

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy$$

หรือหา E[Y] ในรูปของ r.v. X ได้เป็น

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx \qquad (A1.32)$$

Moments

ในกรณี $g(X) = X^n$ โดยสมการที่ (A1.32)

เราได้

$$\underbrace{E[X^n]}_{\text{moment ที่ } n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx \qquad A1.33$$

กรณี $n = 2 \Rightarrow g(X) = X^2$

เราได้

$$\underbrace{E[X^2]}_{\text{mean-square value}} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx \qquad A1.34$$

ที่ μ_X แทน mean และ $g(X) = (X - \mu_X)^n$

เราได้

$$\underbrace{E[(X-\mu_X)^n]}_{\text{Central moment}} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^n f_X(x)\, dx \qquad A1.35$$

ที่ μ_X แทน mean และ $g(X) = (X-\mu_X)^2$

เราได้

$$\sigma_X^2 = \underbrace{E[(X-\mu_X)^2]}_{\text{variance}} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)\,dx \qquad \text{A1.36}$$

$$\underbrace{\sigma_X}_{\text{standard deviation}} = \sqrt{E[(X-\mu_X)^2]}$$

การหา σ_X^2 โดยตรงจากการ Integral ซึ่งมักจะยุ่งยาก นักคณิตศาสตร์ได้ใช้คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น ทำให้สามารถสร้างความสัมพันธ์ได้เป็น

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 \qquad \text{(A1.38)}$$

Joint Moment

ให้ X, Y เป็น r.vs เกรียม

$$\underbrace{E[X^i Y^k]}_{\text{joint moments}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{(A1.41)}$$

กรณี $i=1, k=1$

$$\underbrace{E[XY]}_{\text{correlation}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \qquad (A1.42)$$

คือ correlation ของ centered r.v.s เรียกว่า

covariance ของ X และ Y

$$cov[XY] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \qquad A1.42$$

$$= E[XY] - \mu_X\mu_Y \qquad A1.43$$

เรียก

$$\underbrace{\rho}_{\text{correlation coefficient ของ X และ Y}} = \frac{cov[XY]}{\sigma_X\sigma_Y}$$

ในเชิงการประยุกต์

r.v.s X และ Y เป็น uncorrelated ก็ต่อเมื่อ

มี covariance เป็นศูนย์ (i.e. $cov[XY] = 0$)

r.v.s X และ Y เป็น orthogonal ก็ต่อเมื่อ

correlation ของ X และ Y เป็น ศูนย์ (i.e $E[XY]=0$)

กรณีพิเศษ ถ้า r.v.s X และ Y เป็น joint Gaussian distribution และ r.v.s X และ Y uncorrelated

→ แล้ว r.v.s X และ Y เป็น statistically independent

แต่ ถ้า r.v.s X และ Y uncorrelated

(โดยไม่ทราบว่า r.v.s X และ Y joint Gaussian distribution)

แล้ว ไม่สามารถสรุปว่า X และ Y เป็น statistically independent

Chapter 1 Random Process

เราจะศึกษาอะไร

theory
- random process คือ?
- ความหมายของ random process ที่เป็น stationary
- การอธิบาย random process, mean, correlation และ covariance
- เงื่อนไขของ stationary random process ที่เป็น ergodic

ประยุกต์
- การประยุกต์ stationary random process เมื่อส่งผ่าน LTI filter
- frequency-domain ของ a random process และ power (energy)

ทรัพยากร

- (channel) ที่ Additive noise เป็น Gaussian Process
- อื่นๆ

Process ในธรรมชาติ (phisic) สามารถอธิบายตาม mathematical model ได้ 2 แบบ

1 deterministic (สามารถบอกรูปแบบการเปลี่ยนแปลงล่วงหน้าได้)

2 stochastic (ไม่สามารถคาดเดาค่าที่แท้จริงล่วงหน้า)