Lecture#07 188340 18 มิ.ย. 55

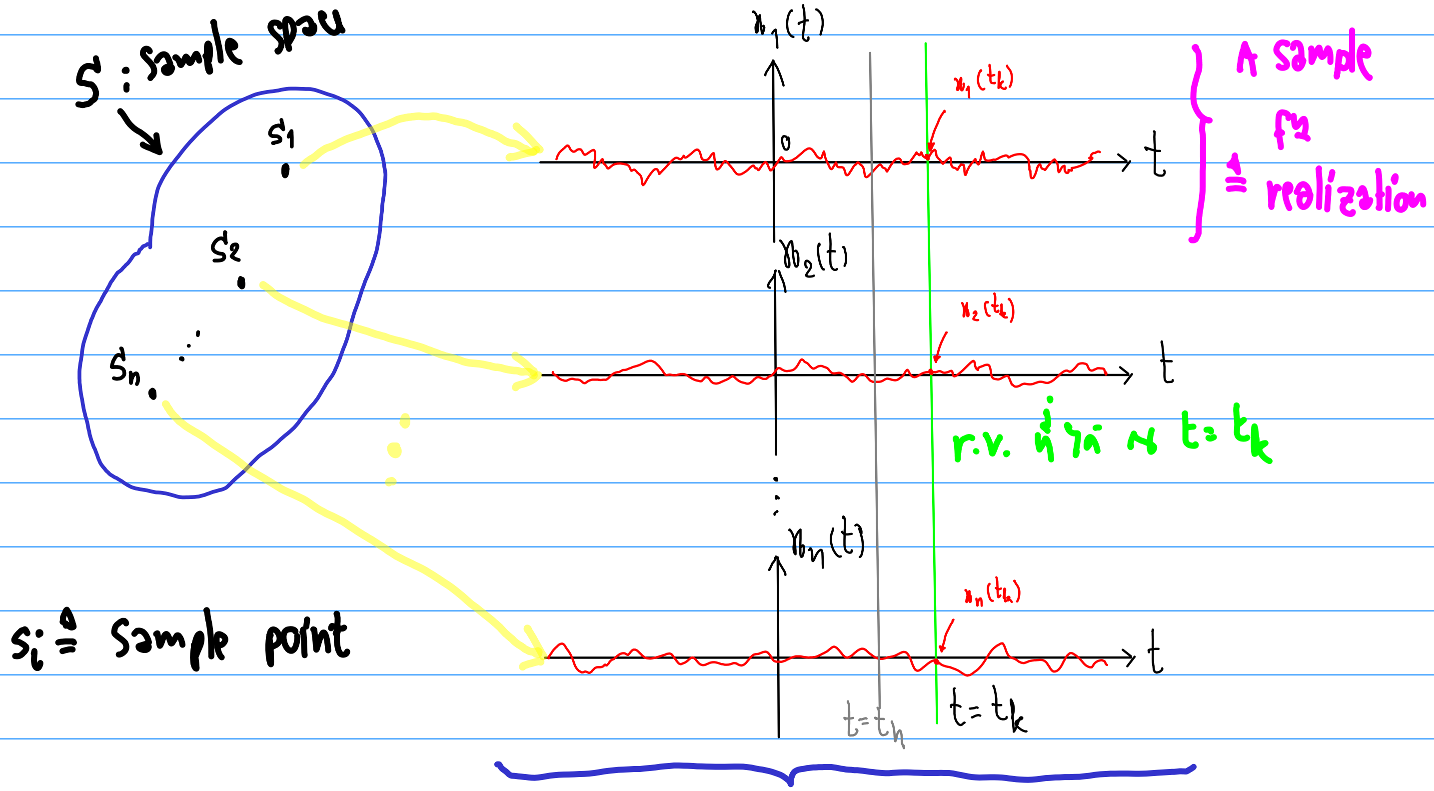
1/2555

- นิยาม random process
- stationary processes
- mean, correlation, covariance
- ergodic processes
- RP to LTI filter
- Power Spectral Density

การสื่อสาร ถูกรบกวน ด้วยสิ่งต่างๆ เกิด noise , thermal noise
ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่ของ electron ใน conductor และอุปกรณ์
ที่อยู่ในเครื่องรับ

นิยามของ random process

< Probability ✓
function vs time ✓



ensemble of sample functions
$\triangleq$ a Random Process

สมมติ แต่ละ sample point s_j เป็น f^{n} ของ เวลา ทบได้

$$X(t, s_j), \quad \underbrace{-T \leq t \leq T}_{\text{ช่วง เวลา สังเกต}}, \quad 1 \leq j \leq n$$

เราแทน a realization (sample function) ของ random process ด้วย

$$x_j(t) = X(t, s_j)$$

เมื่อเรา fixed $t = t_k$ เราจะได้ เซต ของ ตัวแปรสุ่ม

$$\{x_1(t_k), x_2(t_k), \ldots, x_n(t_k)\} = \underbrace{\{X(t_k, s_1), X(t_k, s_2), \ldots, X(t_k, s_n)\}}_{\text{a random variable}}$$

ความแตกต่างระหว่าง random variable และ random process

1 a random variable : f^{n} ที่ map outcome (จากการทดลองสุ่ม) ไปยังค่าจำนวนจริง

2 a random process : outcome (จากการทดลองสุ่ม) ถูก map ไปยัง waveform ที่ฟังก์ชันเวลา

Stationary Processes

a random process $X(t)$ เป็น strictly stationary

ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$F_{X(t_1),\ldots,X(t_k)}(x_1,\ldots,x_k) = F_{X(t_1+\tau),\ldots,X(t_k+\tau)}(x_1,\ldots,x_k) \qquad (1.3)$$

สำหรับทุกการเลื่อนเวลา τ และทุก k

ในทำนองเดียวกัน เรากล่าวว่า $X(t)$ และ $Y(t)$ jointly stationary

ถ้า joint finite-dimensional distribution ของเซตของ random variables $\{X(t_1),\ldots,X(t_k)\}$ และ $\{Y(t_1'),\ldots,Y(t_k')\}$ ไม่ขึ้นกับ $\tau = t_j' - t_j$

แบบง่ายๆ ถ้า process เป็น strictly stationary รวมทั้ง jointly stationary แล้ว joint CDF ไม่ขึ้นกับ origin $t=0$

เคส: พิจารณาส่วนที่น่าสนใจ ที่เกี่ยวข้องกับ communication :

1. $\underbrace{k=1}_{\text{order}=1}$ เราได้

$$F_{X(t)}(x) = F_{X(t+\tau)}(x) = F_X(x) \quad \text{สำหรับ } \forall t, \forall \tau \qquad (1.4)$$

first-order distribution function ของ a strictly stationary random process ไม่ขึ้นกับเวลา

2. $\underbrace{k=2}_{\text{order}=2}$, $\tau = -t_1$ เราได้

$$F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2) = F_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1,x_2), \quad \forall t_1, \forall t_2 \qquad (1.5)$$

second-order distribution function ของ a strictly stationary random process ขึ้นอยู่กับ ผลต่างของเวลาที่สังเกต

1.4 Mean, Correlation และ Covariance function

ให้ $X(t)$ เป็น strictly stationary เราเรียก mean ของ random process $X(t)$ เป็น

$$\mu_X(t) \triangleq E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x)\,dx = \mu_X, \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad (1.7)$$

นั่นคือ ค่า mean ของ strictly stationary process เป็น ค่าคงที่

นิยาม autocorrelation function ของ process $X(t)$ เป็น

$$R_X(t_1, t_2) \triangleq E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \qquad (1.8)$$

$$\overset{\text{strictly stationary}}{=} R_X(t_2 - t_1), \quad \forall t_1, \forall t_2 \qquad (1.9)$$

ในทำนองเดียวกัน autocovariance function ของ a strictly stationary process, $X(t)$ นิยามดัง

$$C_X(t_1, t_2) \triangleq E[(X(t_1) - \mu_X)(X(t_2) - \mu_X)]$$

$$= R_X(t_2 - t_1) - \mu_X^2 \qquad (1.10)$$

ดังนั้น ทราบ autocorrelation fn และ mean ก็เป็นการให้ข้อมูลของ ทั้งสอง second-order moment

จาก สมการ (1.7) – (1.10) เราได้ข้อสรุปที่สำคัญ 2 ประการ คือ

1. ค่า mean และ autocorrelation function เป็นเพียง
การอธิบายบางส่วน ของการแจกแจง ของ random process $X(t)$

2. ค่า mean และ autocorrelation function เพียง 2 อย่าง
ไม่เพียงพอ ที่จะบอกประกันว่า random process $X(t)$
เป็น strictly stationary

ระบบ Communication ทั่วไป ที่สอดคล้อง กับ
second-order stationary หรือ wide-sense stationary
(1.4 – 1.5) ⇒ (1.7 – 1.9)
เพียงพอต่อการออกแบบ และจะเรียก ว่า stationary process

Properties ของ Autocorrelation fn

$X(t)$ เป็น stationary process แล้ว

$$R_X(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)], \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.11)$$

1. mean-square value ของ process คือ

$$R_X(0) = \underbrace{E[X^2(t)]}_{\text{mean sq. value}} \quad (1.12)$$

2. $$\underbrace{R_x(\tau) = R_x(-\tau)}_{\text{เป็น even fn}} \qquad (1.13)$$

3. $$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) \qquad (1.14)$$

ในแง่การประยุกต์ $R_x(\tau)$:

ถ้า $x(t)$ มีการเปลี่ยนแปลงที่เร็ว $\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|$ มาก

แล้ว

autocorrelation fn จะมีการลดลงอย่างรวดเร็ว