- -ergodic processes
- -RP to LTI filter
- -Power Spectral Density
- -Gaussian Process
- -Noise

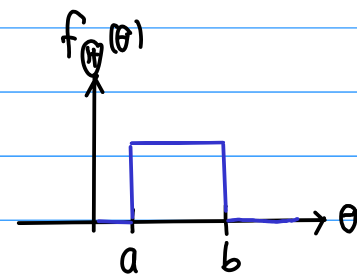
locally generated carrier ในเครื่องรับ (Bandpass)

EX

$$X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \Theta) \qquad (1.15)$$

เมื่อ A และ f_c มีค่าคงที่ และ Θ เป็น a random variable ที่ uniformly distributed เหนือช่วง $[-\pi, \pi]$ นั่นคือ

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \le \theta \le \pi \\ 0, & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$



จาก คุณสมบัติ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\Theta(\theta)\,d\theta = 1$$

$$= f_\Theta \overset{b-a}{\cancel{\int_a^b 1}}\, d\theta = 1$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{b-a}$$

เราสามารถหา autocorrelation fn

$$R_X(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)]$$

$$= E[A^2\cos(2\pi f_c(t+\tau)+\Theta)\cdot \cos(2\pi f_c t + \Theta)]$$

$$= \frac{A^2}{2}E[\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c\tau + 2\Theta)]$$

$$+ \frac{A^2}{2}E[\cancel{\cos(2\pi f_c \tau)}]$$

deterministic

$$= \frac{A^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\cancel{\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\theta)}^{\,0}\, d\theta$$

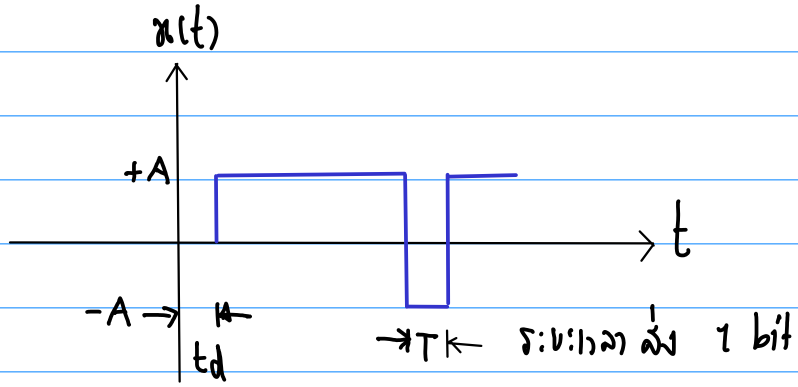
$$\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau)$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau) \qquad (1.17)$$

```
t=SR.symbol("t",domain="real")
f=SR.symbol("f",domain="real")
tau=SR.symbol("tau",domain="real")
theta=SR.symbol("theta",domain="real")
integral((1/2/pi)*cos(4*pi*f*t+2*pi*f*tau+2*theta),theta,-pi,pi)
0
```

Ex Random binary wave

ให้ $X(t)$ เป็น random sequence ของ binary symbols "1", "0"



ให้ $+A \triangleq$ "1", $-A \triangleq$ "0" ระยะเวลาส่ง 1 bit เป็น T วินาที

และ $$f_{T_d}(t_d) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \le t_d \le T \\ 0, & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

ให้ ทุก ช่วงของ เวลา $(n-1)T < t - t_d < nT$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

มีการผลิต บิต "0" และ "1" ตามหลักการโยนเหรียญ ที่ไม่มีการถ่วง

สังเกตุว่า มี $-A$ และ $+A$ เกิดขึ้น ตามความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{1}{2}$

เราจึงได้ $\mu_{X(t)} = \mu_X = 0$

ต่อไปเราจะหา autocorrelation fn , $R_X(t_k, t_i)$

ตามการพิจารณาเป็น 2 ช่วง

ช่วงแรก เมื่อ $|t_k - t_i| > T$: จากโจทย์ เงื่อนไขนี้ เราได้

r.v.s $X(t_k)$ และ $X(t_i)$ เกิดขึ้นบนพัลส์ที่ต่างกัน จึงได้

r.v.s ทั้งสอง เป็นอิสระต่อกัน จึงได้

$$E[X(t_k)X(t_i)] = E[X(t_k)]\,E[X(t_i)] = 0, \quad |t_k - t_i| > T$$

<u>หมายเหตุ</u> ถ้า r.v.s สองตัวเป็นอิสระต่อกัน แล้ว autocorrelation fn

เป็น 0

ช่วงสอง : $|t_k - t_i| < T$ ถ้าให้ $t_k = 0$ และ $t_i < t_k$

ได้ r.v.s $X(t_i)$ และ $X(t_k)$ เกิดขึ้นบนพัลส์ช่วงเดียวกัน

ก็ต่อเมื่อ $\overbrace{t_d \text{ สอดคล้องกับ } t_d < T - |t_k - t_i|}^{\text{เงื่อนไข}}$

เราได้ conditional expectation :

$$E[X(t_k)X(t_i) \mid t_d] = \begin{cases} A^2, & 0 < t_d < T - |t_k - t_i| \\ 0, & t_d \text{ เป็นค่าอื่น} \end{cases}$$

และหาค่า autocorrelation fn สำหรับทุกค่า t_d เราได้

$$\overbrace{E[X(t_k)X(t_i)]}^{R_X(x(t_k),\, x(t_i))} = \int_0^{T-|t_k-t_i|} A^2 \cdot f_{T_d}(t_d)\, dt_d$$

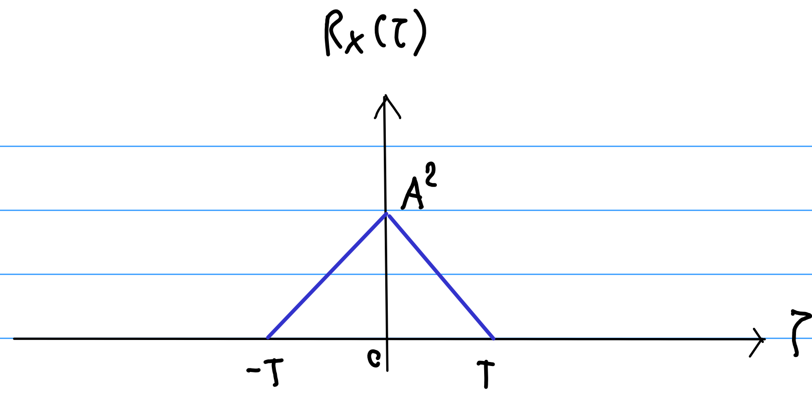
$$= \int_0^{T-|t_k-t_i|} A^2 \cdot \frac{1}{T}\, dt_d$$

$$= A^2\left(1 - \frac{\overbrace{|t_k - t_i|}^{\tau}}{T}\right), \quad \overbrace{|t_k - t_i|}^{\tau} < T$$

จึงสรุปได้ว่า

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2\left(1 - \dfrac{|\tau|}{T}\right), & |\tau| < T \\ 0, & |\tau| \geq T \end{cases} \qquad (1.18)$$

เมื่อ plot graph



※

Cross - Correlation ฟังก์ชัน

เป็น stationary

มีสอง random process $X(t)$ และ $Y(t)$ ต่างมี autocorrelation

ฟังก์ชัน $R_X(t,u)$ และ $R_Y(t,u)$ กำหนดให้

Cross - correlation ฟังก์ชัน ของ $X(t)$ และ $Y(t)$ เขียนได้

$$R_{XY}(t,u) = E[X(t)Y(u)] \qquad (1.19)$$

และ

$$R_{YX}(t,u) = E[Y(t)X(u)] \qquad (1.20)$$

เมื่อ t และ u แทนเวลาที่ observe เราสามารถแทนรูป

ของ matrix ที่เรียกว่า correlation matrix

$$\mathbf{R}(t,u) = \begin{bmatrix} R_X(t,u) & R_{XY}(t,u) \\ R_{YX}(t,u) & R_Y(t,u) \end{bmatrix}$$

และได้ jointly stationary ของ $X(t)$ และ $Y(t)$

โดยเขียนในรูป correlation matrix เป็น

$$\mathbf{R}(\tau) = \begin{bmatrix} R_X(\tau) & R_{XY}(\tau) \\ R_{YX}(\tau) & R_Y(\tau) \end{bmatrix} \qquad (1.21)$$

เมื่อ $\tau = t-u$

นอกจากนี้จะพบว่า

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \qquad (1.22)$$

Ex กำหนด quadrature-modulated process

$X_1(t)$ และ $X_2(t)$ ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกับ stationary process $X(t)$ ดังสมการ

$$X_1(t) = X(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta)$$

$$X_2(t) = X(t)\sin(2\pi f_c t + \Theta)$$

เมื่อ f_c แทนความถี่ของคลื่นพาหะ ,

Θ เป็น a r.v. ที่ uniformly distributed บนช่วง $[0, 2\pi]$ และเป็นอิสระเชิงสถิติจาก $X(t)$

ต่อไปหาฟังก์ชัน Cross-correlation fn ของ $X_1(t)$ และ $X_2(t)$

$$
\begin{aligned}
R_{12}(\tau) &= E[X_1(t)\,X_2(t-\tau)] \\
&= E\big[\,X(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta)\cdot \\
&\qquad X(t-\tau)\sin(2\pi f_c(t-\tau) + \Theta)\big] \\
&= E\big[X(t)X(t-\tau)\cos(2\pi f_c t + \Theta)\cdot \\
&\qquad \sin(2\pi f_c(t-\tau) + \Theta)\big] \\
&= \frac{1}{2}R_X(\tau)\,E\Big[\cancelto{0}{\sin(4\pi f_c t - 2\pi f_c\tau + 2\Theta)} \\
&\qquad \underbrace{-\sin(2\pi f_c\tau)}_{\text{dete.}}\Big] \\
&= -\frac{1}{2}R_X(\tau)\sin(2\pi f_c\tau)
\end{aligned}
$$

สังเกตว่า

$$
R_{12}(0) = -\frac{1}{2}R_X(0)\cancelto{0}{\sin(2\pi f_c\cdot 0)} = 0
$$

ในทางปฏิบัติ นั่นหมายความว่า quadrature modulated process $X_1(t)$, $X_2(t)$ ณ ค่าเวลาที่ถูกตรึง t จะ orthogonal ต่อกันและกัน

#