- -ergodic processes
- -RP to LTI filter
- -Power Spectral Density
- -Gaussian Process
- -Noise

distribution fn

Ergodic Process

(1) ค่าเฉลี่ยจาก 1 sample fn = $\underbrace{\text{ensemble average}}_{}$? expectation (2)

DC value

เพราะจะทำให้ process แบบระบบง่าย สมมุติฐาน

(1) พิจารณา sample function $x(t)$ ของ stationary process

$X(t)$ ช่วงเวลาสังเกต $-T \le t \le T$ หาค่า time average

$$\mu_x(T) = \underbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt}_{\text{a r.v.}} \qquad (1.24)$$

stationary process

และ:

$$E[\mu_x(T)] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[x(t)]\,dt$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mu_x\,dt$$

$$= \mu_x \cdot \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 1\,dt = \mu_x \qquad (1.25)$$

1

นอกจากนี้ $\underbrace{E[X(t)]}_{\text{ensemble average}} = \mu_x$

เราเรียก process $X(t)$ เป็น ergodic in the mean ถ้า สอดคล้องกับ สองเงื่อนไข ต่อไปนี้

- $$\underbrace{\lim_{T \to \infty} \mu_x(T)}_{\text{time average}} = \underbrace{\mu_x}_{\text{ensemble average}}$$

- $$\lim_{T \to \infty} \operatorname{var}[\mu_x(T)] = 0$$

เมื่อพิจารณา time-averaged autocorrelation function

$$R_x(\tau, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t+\tau)\, x(t)\, dt \qquad (1.26)$$

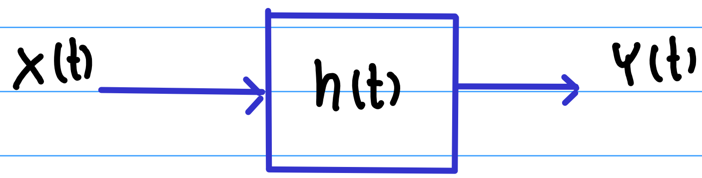
ถ้า $X(t)$ เป็น ergodic in the autocorrelation function

และต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข 2 ข้อ ต่อไปนี้

- $$\lim_{T \to \infty} R_x(\tau, T) = R_x(\tau)$$

- $$\lim_{T \to \infty} var[R_x(\tau, T)] = 0$$

Transmission ของ X(t) ผ่าน LTI



ให้ X(t) เป็น a stationary process

จะได้

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) X(t-\tau_1)\, d\tau_1$$

และ

$$\mu_Y(t) = E[Y(t)]$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) X(t-\tau_1)\, d\tau_1\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) \overset{\mu_X}{E[X(t-\tau_1)]}\, d\tau_1$$

$$= \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)\, d\tau_1 \qquad \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) e^{-j2\pi 0 \tau_1}\, d\tau_1$$

$$= \mu_X H(0) \quad ; \; H(0) = \mathcal{F}\{h(\tau_1)\}\Big|_{f=0}$$

(1.29)

ต่อไปพิจารณา

$$R_Y(t,u) = E[Y(t)Y(u)]$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) X(t-\tau_1)\, d\tau_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) X(u-\tau_2)\, d\tau_2\right]$$

$\tau = t-u$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2$$

(1.32)

สมการ (1.32) บอกให้ทราบว่า $R_Y(t,u)$ ขึ้นอยู่กับ time difference

ดังนั้น (จาก 1.29 และ 1.32) จึงได้ว่า

$Y(t)$ เป็น a stationary process

mean-square value

เพราะว่า $R_Y(0) = E[Y^2(t)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)\, h(\tau_2)\, R_X(\tau_2-\tau_1)\, d\tau_1 d\tau_2 \qquad (1.33)$$

= ค่ากำลังที่

Power Spectral Density ⟨ Bandwidth / พลังงาน / pdf

ต่อไปเราจะพิจารณาใน frequency-domain ของ (1.33)

เมื่อ $$h(\tau_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{H(f)}_{\text{freq. response ของ LTI}} e^{j2\pi f\tau_1}\, df$$

แทนใน (1.33)

$$E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi f\tau_1} df\right] h(\tau_2) R_X(\tau_2-\tau_1)\, d\tau_1 d\tau_2$$

$\tau = \tau_2 - \tau_1$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} df\, |H(f)|^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau}_{\mathcal{F}\{R_X(\tau)\}} \qquad (1.37)$$

เมื่อ $|H(f)|$ = magnitude response ของ filter

มีหน่วยเป็น

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} \, d\tau \qquad (1.38)$$

เมื่อ $S_X(f)$ เรียกว่า Power Spectral Density

จาก (1.37) และ (1.38) ได้

$$\star \quad E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_X(f) \, df \qquad (\text{Watt}/\text{Hz}) \qquad (1.39)$$

Properties ของ Power Spectral Density

ถ้า $X(t)$ เป็น stationary process แล้ว

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} \, d\tau \qquad (1.42)$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} \, df \qquad (1.43)$$

เราเรียก ความสัมพันธ์นี้ว่า Einstein - Wiener - Khintchine relations

Property 1

พ.ท. ใต้กราฟ ของ $R_X(\tau)$

$$S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \, d\tau \qquad (1.44)$$

Property 2

พื้นที่ใต้กราฟของ $S_x(f)$

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df \qquad (1.45)$$

Property 3

$$S_x(f) \geq 0 \quad , \quad \forall f \in \mathbb{R} \qquad (1.46)$$

Property 4

$$S_x(-f) = S_x(f) \qquad (1.47)$$

หรือ $S_x(f)$ เป็น even $f^{\underline{n}}$

Property 5

probability density $f^{\underline{n}}$ ของ r.v. X

↓

$$P_x(f) = \frac{S_x(f)}{\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df} \qquad (1.48)$$