- -Power Spectral Density
- -Gaussian Process
- -Noise
- -Narrowband noise

Ex random process $X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \Theta)$

เมื่อ Θ เป็น a r.v. ที่ uniformly distributed บนช่วง

$[-\pi, \pi]$ (ดู Lecture #08) เราได้

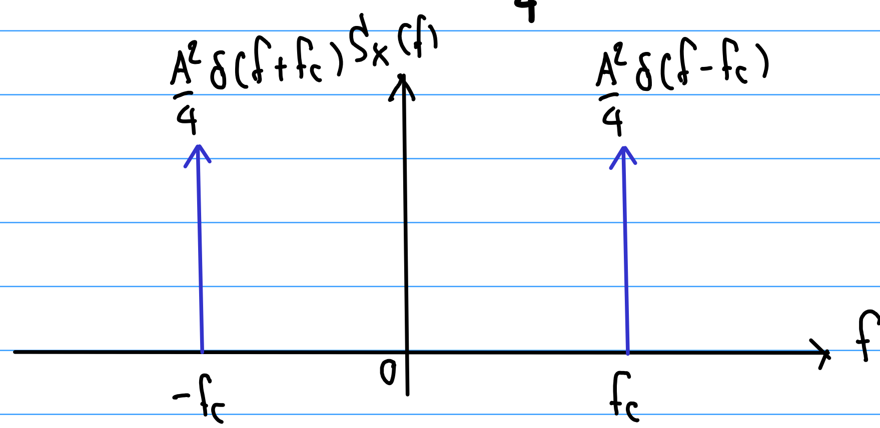
$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau)$$

ได้ (เพราะ $X(t)$ เป็น a stationary process)

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}$$

ตาม

$$= \frac{A^2}{4}\left[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)\right]$$



#

Ex จาก (Lecture #08 Ex ลำดับ 2)

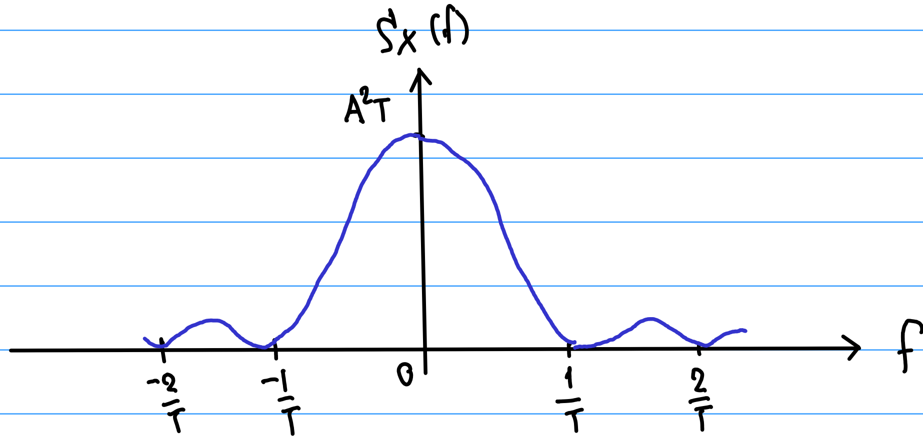
ได้

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2\left(1 - \dfrac{|\tau|}{T}\right), & |\tau| < T \\ 0, & |\tau| \geq T \end{cases}$$

เนื่องจาก x(t) เป็น a stationary process จึงได้

$$S_X(f) \overset{\text{ตามนิยาม}}{=} \int_{-T}^{T} A^2\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$= A^2 T \operatorname{sinc}^2(fT) \qquad (1.50)$$



#

จาก (1.50) เกิดจากแทน $S_X(f)$ ในรูป energy spectral density

$$\mathcal{E}_g(f) = A^2T^2 \operatorname{sinc}^2(fT) \qquad (1.51)$$

บทนิยาม $$S_x(f) \triangleq \frac{\mathcal{E}_g(f)}{T} \qquad (1.52)$$

ความสัมพันธ์ของ Power spectral densities ของ i/o random process

a stationary

$$x(t) \longrightarrow \underset{}{\overset{\text{LTI}}{\boxed{h(t)}}} \longrightarrow y(t)$$

ให้ $S_y(f)$ แทน power spectral density ของ $y(t)$

และ

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) \qquad (1.53)$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง Power spectral density และ Magnitude spectrum ของ a sample fn

ให้ $X(t)$ เป็น a stationary process ที่มี power spectral density fn $S_x(f)$ และให้ $X(t)$ เป็น ergodic เราจะพบว่า sample fn ของ $X(t)$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$ จึงไม่สามารถหา Fourier

transform ได้ ด้วยเหตุนี้ จึงใช้วิธีลดช่วงของการสังเกตุ

เป็น $-T \le t \le T$ และเรียก process นี้ว่า $X(t,T)$

เราสามารถหา Fourier transform ของ sample fn ของ

$X(t,T)$ ได้ดังนี้

$$X(f,T) = \int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \qquad (1.60)$$

เมื่อ $X(t)$ เป็น ergodic เราได้ autocorrelation fn

$R_X(\tau)$ ของ $X(t)$ เท่ากับการหาจาก time-average formula

$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)\, x(t)\, dt \qquad (1.61)$$

และเราได้

$$\underbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)\, x(t)\, dt}_{\text{time average autocorrelation function}} \rightleftharpoons \underbrace{\frac{1}{2T}\left| X(f,T) \right|^2}_{\text{periodogram}} \qquad (1.62)$$

และ

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E\left[\left| X(f,T) \right|^2 \right] \right\} e^{j2\pi f \tau} \, df \qquad (1.66)$$

จะได้

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E\left[|X(f,T)|^2 \right]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E\left[\left| \int_{-T}^{T} x(t) e^{-j2\pi f t} \, dt \right|^2 \right] \qquad (1.67)$$

Cross - Spectral Densities

ให้ $X(t)$ และ $Y(t)$ เป็น jointly stationary process

<u>หมายเหตุ</u> $S_X(f)$, $S_Y(f)$ บอกให้ทราบการแจกแจงการใช้กำลัง ณ ความถี่ต่างๆ

สำหรับ cross-spectral densities ความสัมพันธ์ระหว่าง 2 random process ที่ความถี่ต่างๆ

เขียนให้ $S_{XY}(f)$ และ $S_{YX}(f)$ แทน cross-spectral densities

จะได้

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \qquad (1.68)$$

และ

$$S_{YX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \qquad (1.69)$$

เนื่องจาก

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$$

จะได้

$$\bigstar \quad S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(-\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(-\tau)\, e^{-j2\pi(-f)\tau}\, d\tau \right]^{*}$$

$$= S_{YX}(-f) = S^{*}_{YX}(f) \qquad (1.70)$$

EX ให้ $X(t)$ และ $Y(t)$ เป็น random processes

โดยที่ทั้งคู่มี mean เป็นศูนย์ และเป็น stationary

ให้ $Z(t) = X(t) + Y(t)$

เกอะ: หา power spectral density ของ $Z(t)$

วิธีทำ เราได้ autocorrelation function ของ $Z(t)$ เป็น

$$R_Z(t,u) = E[Z(t)Z(u)]$$

$$= E[(X(t)+Y(t))(X(u)+Y(u))]$$

$$= E[X(t)X(u)] + E[X(t)Y(u)] + E[Y(t)X(u)] + E[Y(t)Y(u)]$$

$$\overset{\tau = t-u}{=} R_X(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) + R_Y(\tau) \quad (1.78)$$

ดังนั้น

$$S_Z(f) = S_X(f) + S_{XY}(f) + S_{YX}(f) + S_Y(f) \quad (1.79)$$

สมมติว่า $X(t)$ และ $Y(t)$ เป็น uncorrelated แล้ว

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(\tau) = 0 \quad \text{และ} \quad S_{XY}(f) = S_{YX}(f) = 0$$

จะได้ (1.79) เป็น

$$S_Z(f) = S_X(f) + S_Y(f)$$

1.8 Gaussian Process

ให้ $X(t)$ เป็น a random process ที่เรา observe

ในช่วงเวลา $t=0$ ถึง $t=T$

ให้ $g(t)$ เป็น ฟังก์ชัน

ให้

$$\underbrace{Y = \int_0^T g(t)\,X(t)\,dt}_{\text{a.r.v.}} \tag{1.79}$$

เราเรียก $X(t)$ ว่า เป็น Gaussian Process ถ้า

Y เป็น Gaussian-distributed random variable

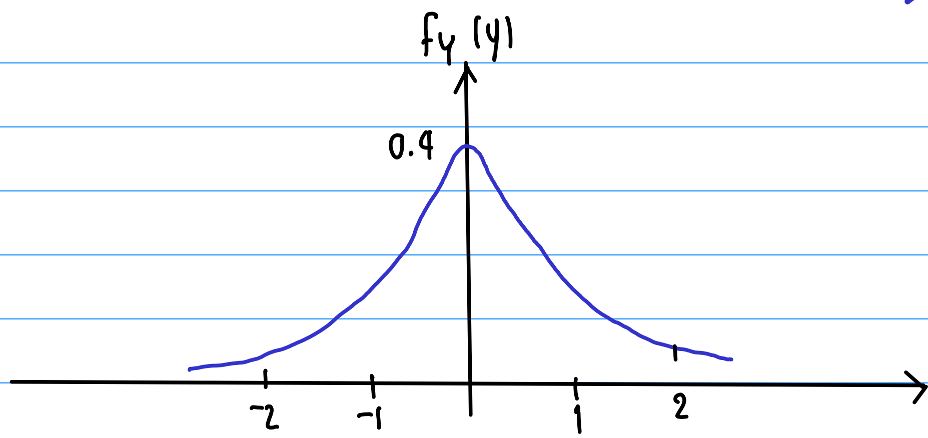
สมมติ $X(t)$ เป็น Gaussian Process แล้ว Y เป็น

a Gaussian distribution ดังนี้ pdf

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y} \exp\left[-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right] \tag{1.80}$$

กรณี $\mu_Y = 0$, $\sigma_Y^2 = 1$ เราได้

$$\underbrace{f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)}_{\text{normalize Gaussian distribution}} \ , \ \mathcal{N}(0,1)$$



Gaussian process มีจุดเด่นที่น่าสนใจ อยู่ 2 ประการ

1 สามารถใช้ Analytic

2 ปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ มักใช้ Gaussian เป็นแบบจำลอง