Lecture#11 — 188340 1/2555 — 2 ก.ค. 55

-Gaussian Process
-Noise
-Narrowband noise

Central limit theorem

ให้ $X(t)$ เป็น random process ใดๆ ให้ X_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ และสมมุติ

1. X_i เป็น statistically independent และ
2. X_i มี probability distribution เหมือนกัน ทั้ง mean, μ_x และ variance σ_x^2

(ในที่นี้เรียก X_i ว่าเป็น independently and identically distributed : i.i.d. random variables)

ให้ $$Y_i = \frac{1}{\sigma_x}(X_i - \mu_x), \quad i = 1, \ldots, N$$

ดังนั้น $E[Y_i] = 0$ และ

$\mathrm{Var}[Y_i] = 1$

นิยาม

$$V_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

central limit theorem

ได้ $\underbrace{\lim_{N \to \infty} V_N = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} Y_i}_{\text{central limit theorem}}$

เป็น normalized Gaussian distribution

Properties ของ Gaussian Process

1.

$$\underbrace{X(t)}_{\text{Gaussian process}} \to \boxed{\text{linear filter}} \to \underbrace{Y(t)}_{\text{Gaussian process}}$$

2. $X(t)$ เป็น Gaussian process ที่ถูก Sampled ณ $t_1, \ldots, t_n$

ได้ r.v.s : $\underbrace{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)}_{\text{Gaussian r.v}}$ และ

$f_{X(t_1), \ldots, X(t_n)}(x_1, \ldots, x_n)$ เป็น Jointly Gaussian

3. ถ้า $X(t)$ เป็น stationary Gaussian process

$\longrightarrow$ $X(t)$ เป็น strictly stationary

④ ให้ $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ เป็นตัวแปรสุ่มที่ได้จาก Gaussian process

ถ้า r.v.s $X(t_i)$ และ $X(t_j)$, $i \neq j$ เมื่อ $1 \leq i, j \leq n$ เป็น uncorrelated

แล้ว $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ เป็น statistically independent

<u>หมายเหตุ</u>

ถ้า $X(t)$ (ไม่เป็น Gaussian process) ที่ซึ่ง $X(t_i)$ และ $X(t_j)$ เป็น uncorrelated

แล้ว ไม่สามารถสรุปได้ว่า $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ เป็น statistically independent

Noise

shot noise — thermal noise — white noise

ในที่นี้จะกล่าวถึง noise ในธรรมชาติ และ noise สังเคราะห์ (เลียนแบบธรรมชาติ)

Shot noise

เกิดจาก electron เคลื่อนที่ใน สารกึ่งตัวนำ ของอุปกรณ์ ไดโอด, ทรานซิสเตอร์ ที่สัมพันธ์กับกระแสไฟฟ้า ที่เป็น discrete

stationary process

ให้ ν แทนจำนวน electron จากการสังเกตระหว่าง t ถึง $t+t_0$

r.v. variable

สมมุติ $E[\nu] \triangleq \lambda t_0$ โดย λ คือ อัตราการเกิด electron

การระบุค่าที่แน่นอนของจำนวนอิเล็กตรอน โดยตรง ทำได้ยาก จึงทำการประมาณการแบบคร่าวๆ ของ จำนวน electron แต่ได้ ฟังก์ชันการแจกแจง จำนวน electron ที่พบระหว่าง t ถึง $t+t_0$ เป็น

$$P(\nu = k) = \underbrace{\frac{(\lambda t_0)^k}{k!} e^{-\lambda t_0}}_{\text{Poisson distribution}}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Thermal noise

เกิดจากการเคลื่อนที่ของ electron ใน Conductor

ให้ $E[V_{TH}^2]$ แทน mean-square value ของ thermal noise

ใน หน่วย Voltage เมื่อ load เป็น resistor

และวัดที่ bandwidth Δf Hertz

จากผลทาง ฟิสิกส์ ได้

อุณหภูมิ องศา kelvin

$$E[V_{TH}^2] = 4kTR\Delta f \qquad \text{volt}^2 \qquad (1.91)$$

ค่าคงที่ Boltzmann's

resistance ใน ohm

spectrum ของเสียง มีความถี่เป็น ∞

white noise

noise ที่ผลิตขึ้น (โดยมนุษย์) เพื่อใช้สำหรับ วิเคราะห์, ออกแบบ ระบบสื่อสาร

ให้ $w(t)$ แทน sample fn ของ white noise process

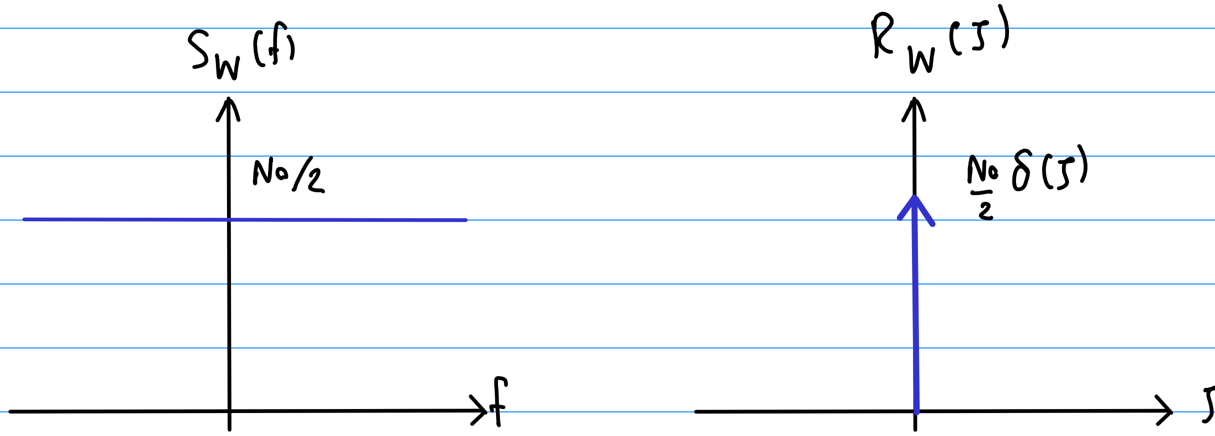
นิยามให้

equivalent noise temperature

$$S_W(f) = \frac{N_0}{2}, \quad N_0 = kT_e \qquad (1.93)$$

power spectral density ของ white noise

เนื่องจาก w(t) เป็น stationary process จึงได้



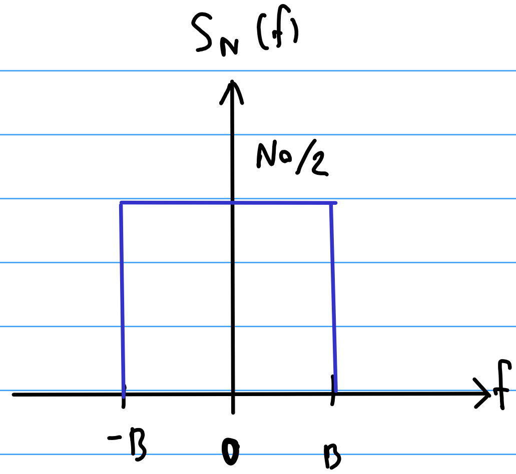
$$R_W(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \qquad (1.95)$$

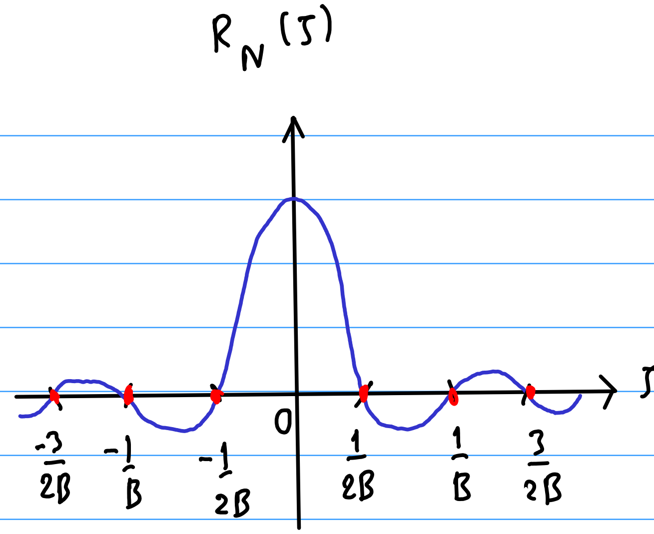
Ex ให้ w(t) ที่เป็น Gaussian noise ตาม mean ศูนย์ power spectral density fn, $\frac{N_0}{2}$ ป้อนเข้า input ของ ideal low-pass filter ของ Bandwidth W แล้ว ได้ output เป็น

$$S_N(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & -B < f < B \\ & \end{cases} \qquad (1.96)$$

(จาก $S_N(f) = |\cancel{H}^{1}(f)|^2 S_W(f)$)

ได้ $R_X(\tau) = \int_{-B}^{B} \frac{N_0}{2} \exp(j2\pi f\tau)\, df = N_0 B \,\mathrm{sinc}(2B\tau)$ (1.97)





เป็น baseband

observe 1 ครั้ง ระยะห่าง $\tau = \frac{1}{2B}$ sec

ดังนั้น ความถี่ของการ observe $2B$ ครั้ง/sec

จังหวะที่ได้ sampled ของ noise เป็นอิสระต่อกัน

filter ในตัวอย่างก่อนหน้านี้ ใช้กับการสื่อสาร ที่เรียกว่า Base band communications ต่อไปเราจะศึกษาตัวอย่างของ band pass filter สำหรับใช้ใน band pass communication

ความถี่สูงกว่า

ทำงานเร็วกว่า วงจร LPF

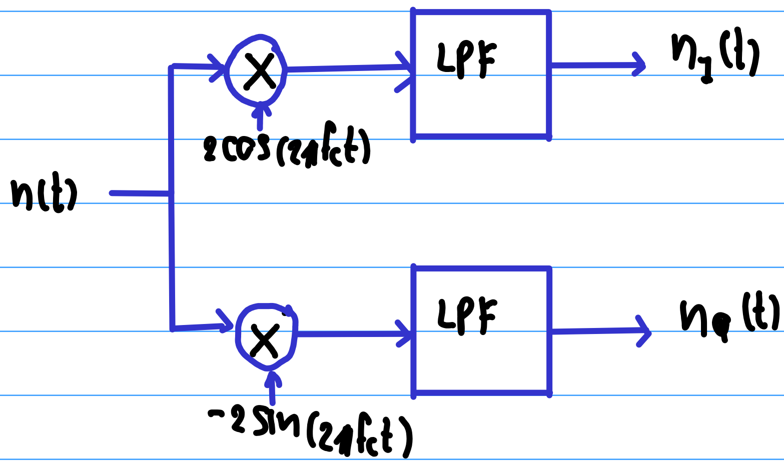
inphase Quadrature

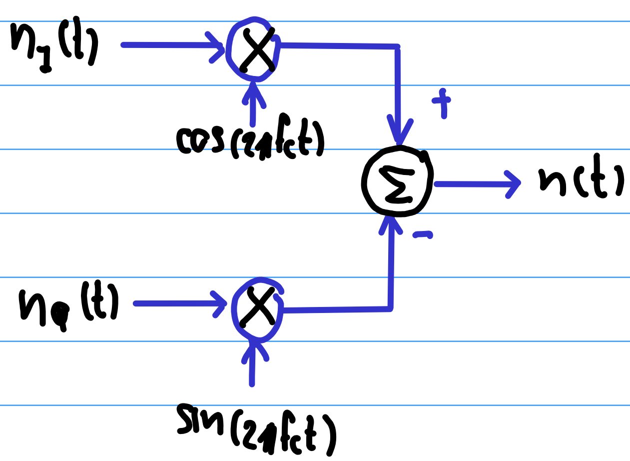
$|B| << f_c$

การแทน Narrowband noise ในรูป in-phase และ ($n_I(t)$) Quadrature components ($n_Q(t)$)

กำหนด noise $n(t)$ ดังนี้

$$n(t) = \underbrace{n_I(t)\cos(2\pi f_c t) - n_Q(t)\sin(2\pi f_c t)}_{\text{Canonical form}}$$





คุณสมบัติของ in-phase และ Quadrature Component

① mean ของ $n_I(t) = n_Q(t) = 0$

② ถ้า $n(t)$ เป็น Gaussian แล้ว

$n_I(t)$ และ $n_Q(t)$ เป็น Jointly Gaussian

3 ถ้า $n(t)$ เป็น stationary process แล้ว

$n_I(t)$ และ $n_Q(t)$ เป็น jointly stationary

4

$$S_{N_I}(f)=S_{N_Q}(f)=\begin{cases} \overbrace{S_N(f-f_c)+S_N(f+f_c)}^{\text{base band}}, & -B\le f\le B \\ 0, & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

เมื่อ $S_N(f)$ ใช้ความถี่ $f_c-B\le |f|\le f_c+B$

5 $Var[n(t)] = Var[n_I(t)] = Var[n_Q(t)]$

6

$$S_{N_I N_Q}(f) = -S_{N_Q N_I}(f)$$

$$= \begin{cases} j\,[S_N(f+f_c)-S_N(f-f_c)], & -B\le f\le B \\ 0, & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

7 ถ้า $n(t)$ เป็น Gaussian และมี power spectral density

$S_N(f)$ ที่สมมาตรรอบจุด ความถี่กลาง f_c แล้ว

$n_I(t)$ และ $n_Q(t)$ เป็น statistically independent