- -source-coding theorem
- -data compaction
- -mutual information
- -differential entropy

Lempel - Ziv Coding

แก้ปัญหา Huffman code ที่ต้องทราบ prob. ของการเกิด Symbols ต่างๆ ใน Alphabet ล่วงหน้า

หลักการของ Lempel - Ziv คือ

parsing the source data stream into segments that are shortest subsequences not encountered previously

ในที่นี้ขอใช้ตัวอย่างประกอบ ให้ source data stream เป็น

00 01 011 10 010 100 101 ...

Numerical position:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Subsequences:	0	1	00	01	011	10	010	100	101
Numerical representation:			11	12	42	21	41	61	62
Binary encoded block:			0010	0011	1001	0100	1000	1100	1101

เรียก right most bit ใน subsequence ว่า innovation symbol

สมมุติ ส่งออกไปยังเครื่องรับ เพื่อ decode

0010 0011 1001 0100 1000 1100 1101

→ 00 01 011 10 010 100 101

Sub seq.	0	1							
Num. posi	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Lempel-Ziv เหมาะกับ synchronous transmission

ในกรณี source เป็น Analog เราจะใช้ ปริมาณต่อไปนี้ ในการวัด information content ซึ่งคือ

$$\underbrace{h(X)}_{\text{differential entropy}} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2 \left[\frac{1}{f_X(x)}\right] dx$$

X : แทน source ในรูป continuous random variable

or continuous random vector

Ex X เป็น source ที่ uniformly distributed ในช่วง $(0,a)$ ได้

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0 < x < a \\ 0, & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

ได้

$$h(X) = \int_0^a \frac{1}{a} \log_2(a)\, dx$$

$$= \log_2(a)$$

Ex ให้ X , Y เป็น random variables

ตาม probability density fns , $f_Y(x)$ และ $f_X(x)$

จาก fundamental inequality ของ discrete memoryless source

$$\sum_{k=0}^{K-1} p_k \log_2\left(\frac{q_k}{p_k}\right) \leq 0$$

ได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x) \log_2\left(\frac{f_X(x)}{f_Y(x)}\right) dx \leq 0 \qquad (9.70)$$

สรุป

$$\underbrace{-\int_{\infty}^{\infty} f_Y(x) \log_2 f_Y(x)\, dx}_{h(Y)} \leq -\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x) \log_2 f_X(x)\, dx \qquad (9.71)$$

สมมติ

- X และ Y มี mean เท่ากัน เป็น μ และ variance เท่ากับ σ^2
- X เป็น Gaussian distributed

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (9.73)$$

และ Properties ของ p.d.f

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_Y(x)\,dx = \sigma^2$$

จะได้ (9.71) เป็น

$$h(Y) \le \underbrace{-\log_2 e \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x)\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \log\left(\sqrt{2\pi}\,\sigma\right)\right)dx}_{\underbrace{\frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma^2)}_{h(X)}} \qquad (9.75)$$

จะได้ว่า

$$h(Y) \le h(X), \quad \begin{cases} X : \text{Gaussian random variable} \\ Y : \text{random variable ใดๆ} \end{cases} \qquad (9.77)$$

[illegible] $h(Y) = h(X)$ เมื่อ Y เป็น Gaussian random variable

① สำหรับ variance, σ^2 Gaussian r.v. มีค่า differential entropy สูงสุด

② entropy ของ Gaussian r.v. X ขึ้นกับ ฟังก์ชันของ variance

9.13 Rate Distortion Theory

- ที่ผ่านมา เกี่ยวกับ Source-Coding ที่เป็น data compression แบบ loseless

- Source ในธรรมชาติ มักเป็น Analog $\approx \mathbb{R}$ ซึ่งไม่สามารถแทนในรูป binary โดยปราศจาก distortion จึงเกิด แนวความคิด แทนข้อมูลในรูป binary โดยแลกเปลี่ยน กับ distortion

การวัด distortion ทำได้โดย rate distortion function

ให้ $X = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots, M\}$ เป็น discrete memoryless source มี prob. $\{p_i \mid i = 1, 2, \ldots, M\}$

R แทน average code rate (bits / code word)

$Y = \{y_j \mid j = 1, 2, \ldots, N\}$ เป็น representation code word

ให้ $p(x_i, y_j)$ แทน joint probability ของ occurrence ของ source symbol x_i และ แทนด้วย symbol y_j

ตามทฤษฎีของ Prob.

$$p(x_i, y_j) = p(y_j \mid x_i)\, p(x_i) \qquad (9.127)$$

ให้ single-letter distortion measure แทนด้วย

$$d(x_i, y_j)$$

ได้

$$\tilde{d} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} p(x_i)\, p(y_j \mid x_i)\, d(x_i, y_j) \qquad (9.128)$$

ค่าเฉลี่ยของ distortion

นิยามให้

$$R(D) = \min_{p(y_j \mid x_i) \in P_D} I(X;Y) \qquad (9.131)$$

หมายเหตุ เงื่อนไข $\sum_{j=1}^{N} p(y_j \mid x_i) = 1$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, M$ (9.132)

เมื่อ $$P_D = \underbrace{\{ p(y_j|x_i) : \bar{d} < D \}}_{\text{set ของ D-admissible conditional probability assignment}} \tag{9.129}$$

และ

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} p(x_i)\, p(y_j|x_i) \log\left(\frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)} \right) \tag{9.130}$$