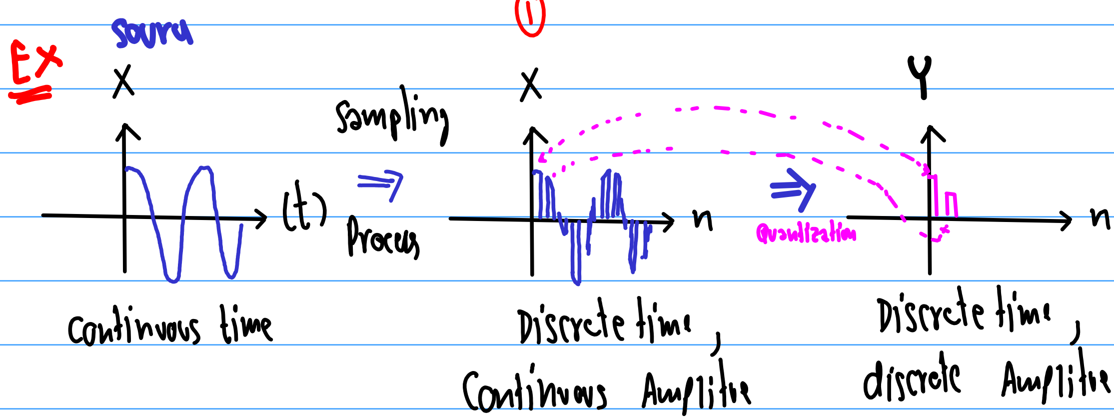
Lecture#15 188340 16 ก.ค. 55

1/2555

rate distortion function, R(D) หมายถึง smallest coding rate possible ที่ซึ่ง average distortion ได้รับการประกันว่ามีค่าไม่เกิน D

Ex



ให้ ① x แทนค่า 100 sample generated โดย X(t)

② y แทนค่า $\underbrace{\text{quantized version ของ } x}_{\text{representation code word}}$

ให้ squared error distortion นิยามโดย

$$d(x,y) = (x-y)^2$$

ให้ X เป็น memoryless Gaussian source ที่มี mean ศูนย์

variance σ^2

แทนค่าใน (9.128) - (9.131) ได้

codeword length / sample (symbol)

$$R(D) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{D}\right), & 0 \le D \le \sigma^2 \\ 0, & D > \sigma^2 \end{cases} \qquad (9.133)$$

สังเกตุว่า $R(D) \to \infty$ เมื่อ $D \to 0$

Distortion

$R(D) = 0$ เมื่อ $D = \sigma^2$

3 Pulse Modulation

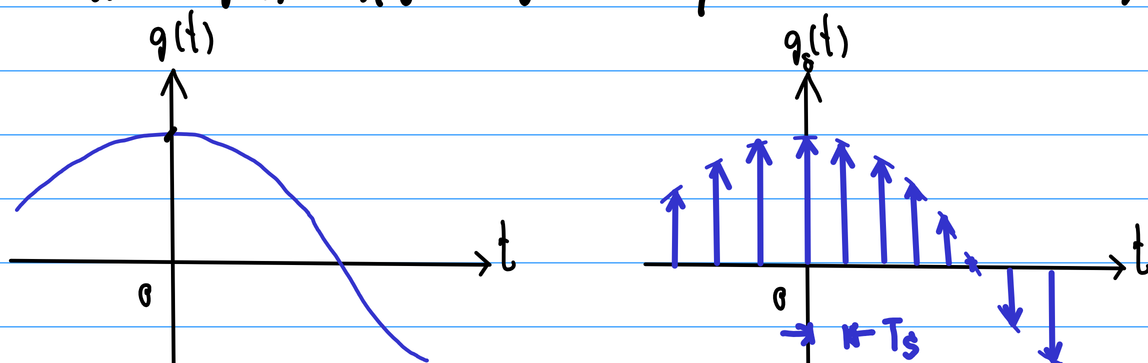
ในบทก่อนนี้ ศึกษาการแปลง analog source → digital → digital Comm.

Pulse Modulation แบ่งเป็น 2 ประเภท

- Analog Pulse Modulation
- Digital pulse Modulation ✓

ทั้ง 2 ประเภท ต้องใช้ กระบวนการ Sampling Process

ให้ $g(t)$ แทน signal ใดๆ ที่เป็น finite energy (a)



(a)

(b) Instantaneously sampled version

จะได้ $g_\delta(t)$ เป็น signal ที่สอดคล้องกับ สมการ (3.1)

$$g_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\,\delta(t - nT_s) \qquad (b) \qquad (3.1)$$

เมื่อ T_s ระยะห่างเวลา sampling $\left(T_s = \frac{1}{f_s}\right)$

จาก Fourier transform (table) ได้

$$g_\delta(t) \rightleftharpoons f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(f - m f_s) \qquad (3.2)$$

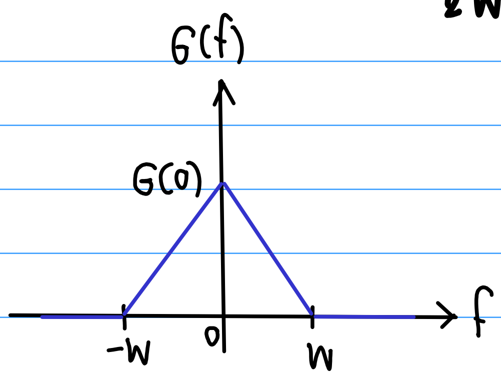
(3.2) บอกได้ว่าการ sampling a continuous-time signal ที่เป็น energy type จะเห็นของ spectrum ได้ periodic spectrum ที่มี period เท่า sampling rate

หากหาจาก Fourier transform ได้ (3.1) เป็น

$$G_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\exp(-j2\pi n f T_s) \qquad (3.3)$$

สมมุติว่า $T_s = \frac{1}{2W}$ เมื่อ W แทน bandwidth ของ $g(t)$

(c)

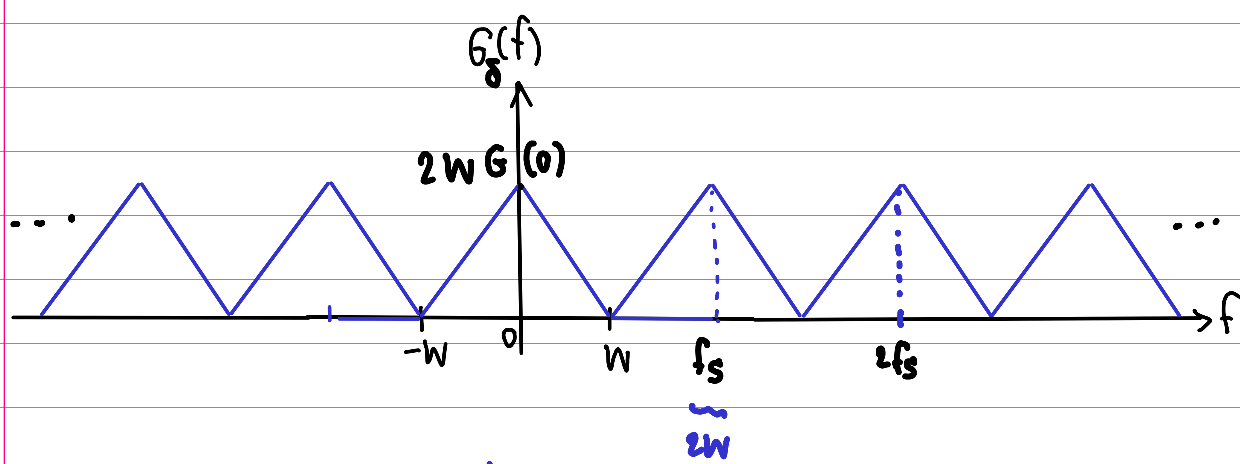


ได้ (3.3) เป็น

$$G_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2W}\right) \exp\left(-\frac{j\pi n f}{W}\right) \qquad (3.4)$$

เพื่อกระทบ (3.2) ได้

$$G_\delta(f) = f_s G(f) + f_s \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} G(f - m f_s) \qquad \text{(d)} \qquad (3.5)$$



(d)

สมการ (3.5) (ดังรูป c,d) บอกให้รู้ว่า

1) $G(f) = 0$ สำหรับ $|f| \geq W$

2) $f_s = 2W$

3) ได้

$$G(f) = \frac{1}{2W} G_\delta(f), \qquad -W < f < W \qquad (3.6)$$

แทน (3.4) ลงใน (3.6) ได้

$$G(f) = \frac{1}{2W}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2W}\right)\exp\left(-\frac{j\pi n f}{W}\right), \quad -W < f < W \qquad (3.7)$$

เมื่อหา Inv Fourier transform ของ G(f) โดยตรง ได้

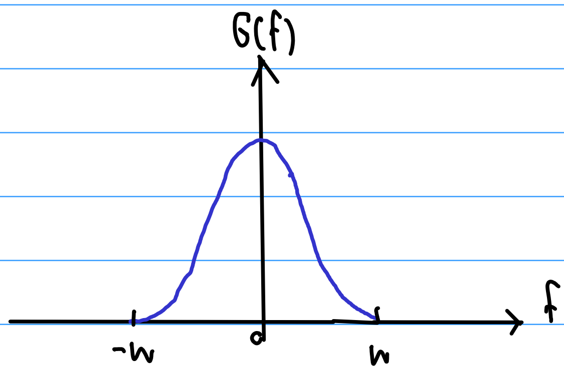
$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\exp(j2\pi f t)\,df$$

$$\overset{(3.7)}{=} \int_{-W}^{W} \frac{1}{2W}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2W}\right)\exp\left(-\frac{j\pi n f}{W}\right)\cdot\exp(j2\pi f t)\,df$$

ใช้ Property ของการ Integral ได้

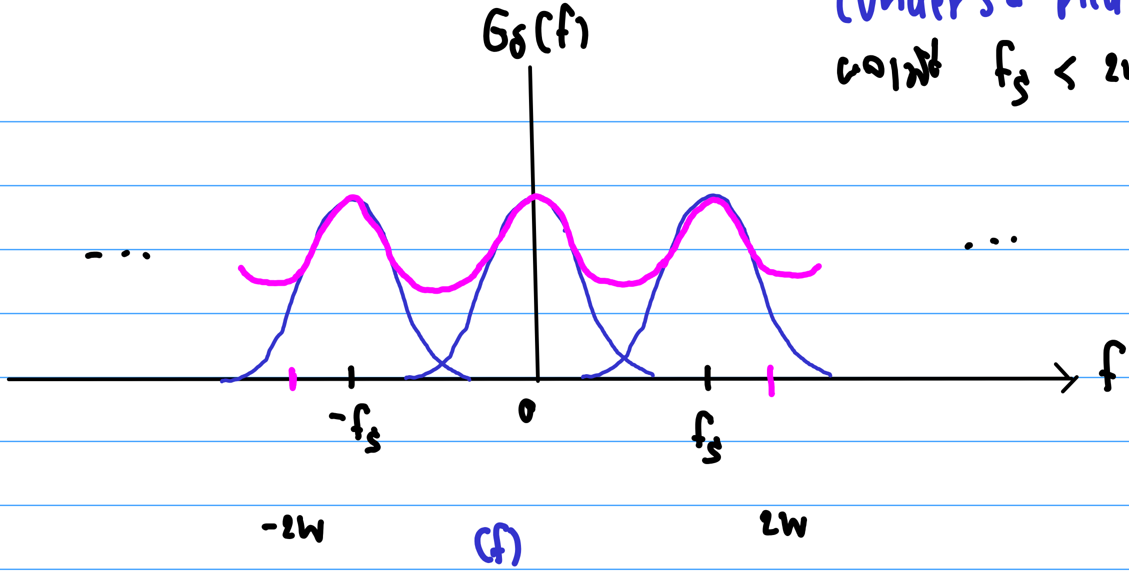
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2W}\right)\operatorname{sinc}(2Wt - n), \quad -\infty < t < \infty$$

สมมติ spectrum ของ g(t) เป็นดังรูป (e)



(e)

(undersampled version)
เมื่อใช้ $f_s < 2W$



" a band-limited signal of finite energy

ที่มี bandwidth W สามารถกู้คืนกลับมาได้

เมื่อใช้ sampling rate $f_s = 2W$ "

ในทางปฏิบัติ เพื่อป้องกันปัญหาของการเกิด undersample

① จะมีการใช้ filter ที่เรียก low-pass anti-aliasing filter

เพื่อกำจัด bandwidth ของ information ไม่ให้เกิน W

② sampled ด้วย อัตราที่สูงกว่า Nyquist rate เล็กน้อย

ในการ recovery $G(f)$ จาก $G_\delta(f)$ ที่มีการ sample ด้วย

อัตรา $f_s \geq 2W$ สามารถทำได้โดยการใช้ lowpass filter

ที่มี bandwidth W