Lecture#17 188340 30 ก.ค. 55

1/2555

- Condition สำหรับ optimality of scalar quantizers

- เพื่อ: ตัดสินการกำหนด ของ ขอบ partition cell และ representation levels ที่ minimum error

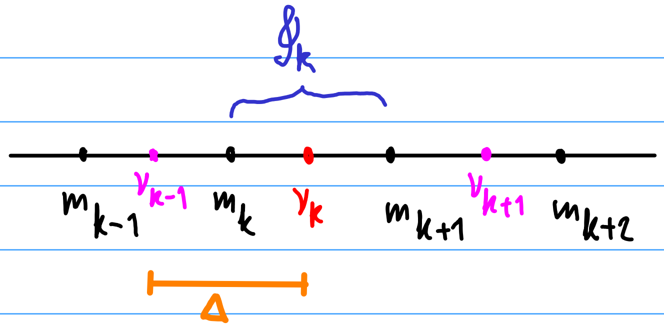


Fig: ตัวอย่าง memoryless quantizer

ให้ $m(t)$ ได้จาก stationary process $M(t)$

ให้ $-A \leq m \leq A$ แทน dynamic range (ช่วงของการเปลี่ยนแปลง) ของ $m(t)$ ที่ถูก partition ออกเป็น cells ตามขอบเขต ค่าจำนวนจริง, $\{m_1, m_2, \ldots, m_{L+1}\}$ ที่สอดคล้องกับ 3 เงื่อนไข ต่อไปนี้

$$m_1 = -A$$

$$m_{L+1} = A$$

$$m_k \leq m_{k+1} \quad \text{สำหรับ } k = 1, 2, \ldots, L$$

พิจารณา partition cell ที่ k โดยกำหนดให้

$$\mathscr{I}_k : m_k < m \le m_{k+1} \quad \text{สำหรับ} \quad k = 1, 2, \dots, L \qquad (3.36)$$

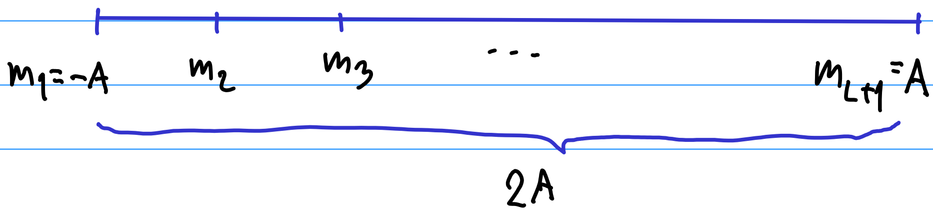


Fig: partitioning of the dynamic range $-A \le m \le A$ ของ message signal $m(t)$ ให้เป็น L cells

ให้ $\nu_k, k = 1, 2, \dots, L$ แทน representation levels

(Receiver ใช้ในการ decode)

ให้ $d(m, \nu_k)$ แทน distortion measure เพื่อ ν_k แทน ทุกค่าของ m ที่อยู่ใน partition cell $\mathscr{I}_k$

เป้าหมาย คือ หา เซต ของ $\{\nu_k\}_{k=1}^{L}$ และ $\{\mathscr{I}_k\}_{k=1}^{L}$

ที่ทำให้ minimize ค่า average distortion

$$D = \sum_{k=1}^{L} \int_{m \in \mathscr{I}_k} d(m, \nu_k) f_M(m)\, dm \qquad (3.37)$$

เมื่อ $f_M(m)$ เป็น probability density function ของ random variable M

และ:

เมื่อ $d(m, v_k) = (m - v_k)^2$ (3.38)

เทอมเรียก (3.37) ว่า mean-square distortion

ต้องไปหา $\{v_k\}_{k=1}^{L}$ และ $\{g_k\}_{k=1}^{L}$ แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 : สมมติกำหนด codebook

$$\mathcal{C} : \{v_k\}_{k=1}^{L} \quad (3.39)$$

เพื่อหาเขตของ partition cells $\{g_k\}_{k=1}^{L}$ ที่ minimum error (3.37)

เพื่อประยุกต์ใช้ประเภทเกณฑ์ nonlinear mapping

$$g(m) = v_k, \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (3.40)$$

ที่ซึ่ง เกิดถ้า

$$D=\int_{-A}^{A} d(m,g(m))f_M(m)\,dM \geq$$

$$\sum_{k=1}^{L}\int_{m\in\mathcal{I}_k}\left[\min_{v_k\in\mathcal{C}} d(m,v_k)\right]f_M(m)\,dm \tag{3.41}$$

ค่าข้างซ้ายของ (3.41) จะเท่ากับค่าขวา เมื่อ

$$d(m,v_k) \leq d(m,v_j) \quad \text{เมื่อ} \quad j\neq k \tag{3.42}$$

ทดสอบได้โดยการใช้ numerical method กับ $\mathcal{I}_k$ ใน (3.41)

เงื่อนไขที่ 2: กำหนด เซตของ partition cells,

$\{\mathcal{I}_k\}_{k=1}^{L}$

และ codebook $\mathcal{C}=\{v_k\}_{k=1}^{L}$

จาก (3.37) และ (3.38)

$$D=\sum_{k=1}^{L}\int_{m\in\mathcal{I}_k}(m-v_k)^2 f_M(m)\,dm \tag{3.43}$$

เนื่องจาก $f_M(m)$ เป็นอิสระจาก $\mathcal{C}$ เราสามารถหาอนุพันธ์ย่อย

เทียบกับ v_k

$$\frac{\partial D}{\partial v_k} = -2 \int_{m \in \mathcal{I}_k} (m - v_k)\, f_M(m)\, dm \qquad (3.44)$$

เมื่อ $\frac{\partial D}{\partial v_k} = 0$ และ หา ผลเฉลย สำหรับ v_k เราได้

$$\bigstar \qquad v_{k,opt} = \frac{\int_{m \in \mathcal{I}_k} m\, f_M(m)\, dm}{\underbrace{\int_{m \in \mathcal{I}_k} f_M(m)\, dm}} \qquad (3.45)$$

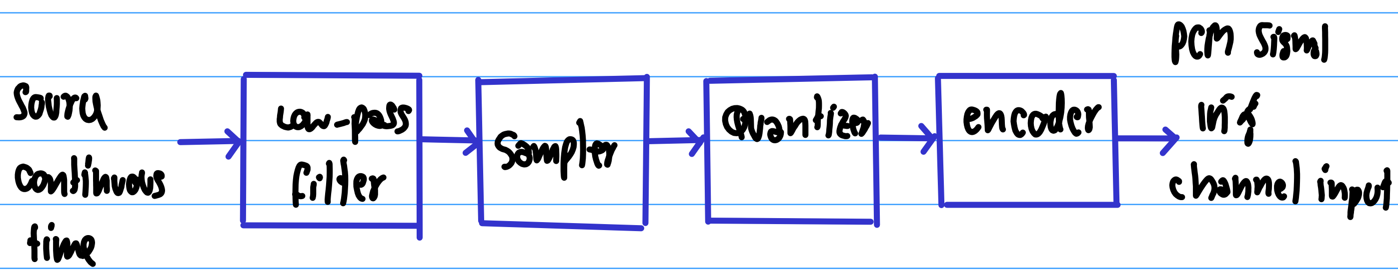
prob. M อยู่ใน partition cell $\mathcal{I}_k$

$$p_k = P(m_k < M \le m_k+1)$$

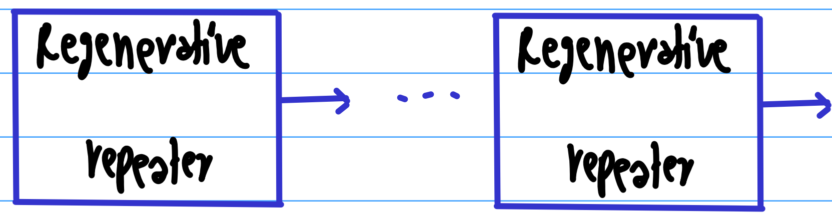
ดังนั้น

$$v_{k,opt} = E[M \mid m_k < M \le m_{k+1}] \qquad (3.47)$$

3.7 Pulse - Code Modulation : PCM



Distorted PCM



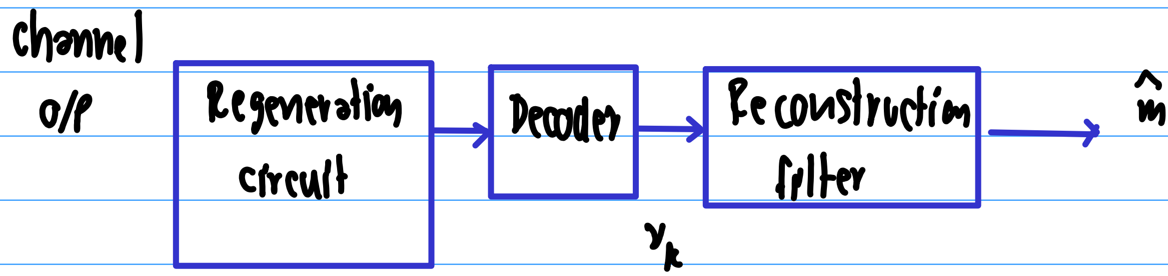


Fig: basic elements of a PCM system