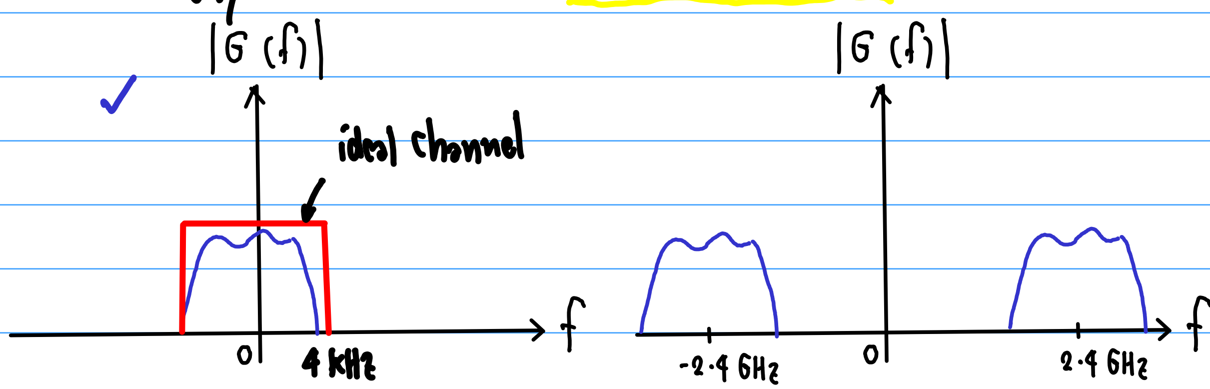
Base band Pulse transmission

ศึกษาการส่ง digital data ผ่าน baseband channel

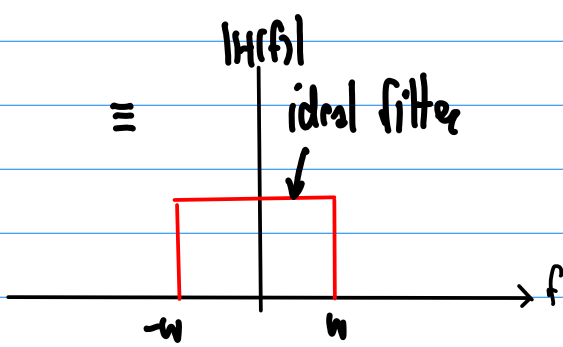
โดยเน้นไปที่

- matched filter ซึ่งเป็น optimum system สำหรับตรวจจับ signal ที่ทราบรูปแบบแน่นอน รวมกับ noise
- Calculation ของ bit error rate ที่เกิดจาก channel noise
- อื่นๆ ผลกระทบจาก nonideal channel ⇒ ISI

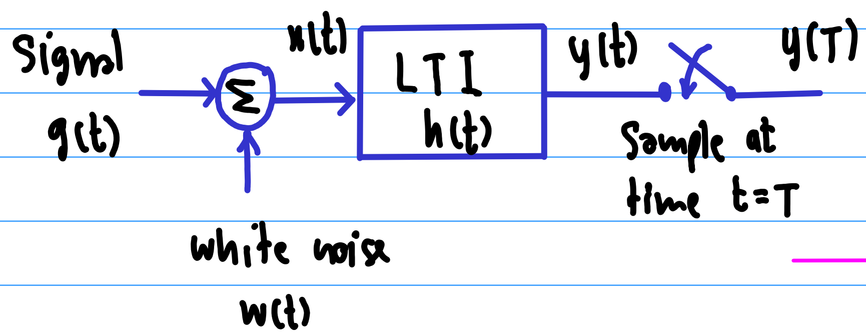


a) baseband channel b) bandpass channel

≡



4.2 Matched filter



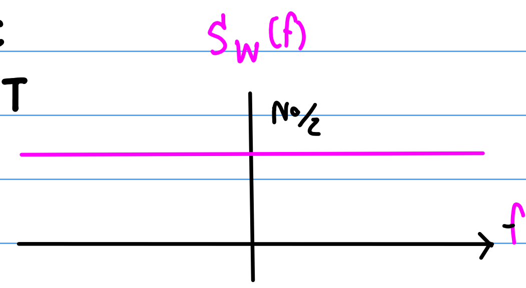


Fig 4.1 Linear receiver

จากรูป 4.1 ได้

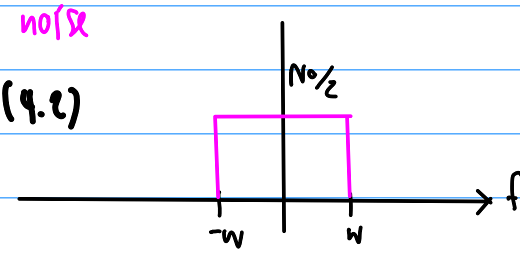
pulse — a sample ของ w(t)

$$x(t) = g(t) + w(t), \qquad 0 \le t \le T \qquad (4.1)$$

และ:

a narrow band noise

$$y(t) = \underbrace{g_o(t)}_{g(t) * h(t)} + n(t) \qquad (4.2)$$



เราต้องการแบบ LTI filter เพื่อให้เกิด error ต่ำสุด

เริ่มต้นหาค่า สูงสุด peak pulse signal-to-noise ratio

เขียนแทนด้วย η เมื่อ

$$\eta = \frac{|g_o(T)|^2}{E[n^2(t)]} \equiv \frac{\text{กำลังชั่วขณะของ output signal}}{\text{average output noise power}} \qquad (4.3)$$

(ในที่นี้สมมติให้ noise process เป็น zero mean และ power spectral density $\frac{N_0}{2}$)

จาก

$$g_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)G(f)\, e^{j2\pi ft}\, df \qquad (4.4)$$

ได้

$$|g_o(T)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)G(f)\, e^{j2\pi fT}\, df \right|^2 \qquad (4.5)$$

ต่อไปพิจารณาในส่วนของ noise ณ filter output จาก

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 \qquad (4.6)$$

ได้ average power ของ output noise, $n(t)$

$$E[n^2(t)] \overset{\text{นิยาม}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f)\, df$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\, df \qquad (4.7)$$

แทนค่า (4.5) และ (4.7) ลงใน (4.3)

$$\eta = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\,G(f)\,e^{j2\pi fT}\,df \right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\,df} \qquad (4.8)$$

จากสมการ (4.8) มีความซับซ้อน จึงใช้ Schwarz's inequality ที่ซึ่ง

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x)\,\phi_2(x)\,dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_1(x)|^2\,dx \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_2(x)|^2\,dx \qquad (4.9)$$

ก็ต่อเมื่อ

$$\phi_1(x) = k\,\phi_2^*(x) \qquad (4.10)$$

$: a+bj \Rightarrow (a+bj)^*$
$= a-bj$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{H(f)}^{\phi_1}\,\underbrace{G(f)\,e^{j2\pi fT}}_{\phi_2}\,df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\,df \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\,df \qquad (4.11)$$

จึงได้

$$\eta \leq \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\,df \qquad (4.12)$$

และ

$$\eta_{max} = \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\,df \qquad (4.13)$$

แก้ไข เงื่อนไข (4.10) หา $H(f)$ ได้ค่าที่เหมาะสมของ $H(f)$

เขียนแทนด้วย $H_{opt}(f)$ และได้

$$H_{opt}(f) = k\,G^*(f)\,e^{-j2\pi fT} \qquad (4.14)$$

ทำ inverse Fourier transform ของ (4.14)

$$h_{opt}(t) = k\int_{-\infty}^{\infty} G^*(f)\,e^{-j2\pi fT}\,e^{j2\pi ft}\,df$$

$$= k\int_{-\infty}^{\infty} G^*(f)\,e^{-j2\pi f(T-t)}\,df \qquad (4.15)$$

เนื่องจาก $g(t)$ เป็น a real signal นั่นคือ $G^*(f) = G(-f)$

ดังนั้น (4.15) จึงได้เป็น

$$h_{opt}(t) = k\int_{-\infty}^{\infty} G(-f)\,e^{-j2\pi f(T-t)}\,df$$

$f \to -f$

$$= k\int_{-\infty}^{\infty} G(f)\,e^{j2\pi f(T-t)}\,df \qquad (4.16)$$

$$= k\,g(T-t)$$

บอกได้ว่า $h_{opt}(t)$ ขึ้นกับ pulse $g(t)$

Properties ของ Matched filter

พิจารณา filter ที่ matched กับ pulse signal $g(t)$

ของ duration T ดังสมการ

$$h_{opt}(t) = k\, g(T-t)$$

และ frequency response เป็น

$$H_{opt}(f) = k\, G^*(f)\, e^{-j2\pi fT}$$

และได้ ผลของ matched filter output $g_o(t)$

มี frequency response เป็น

$$G_o(f) = H_{opt}(f)\, G(f)$$

$$= k\, G^*(f)\, e^{-j2\pi fT}\, G(f) \qquad (4.17)$$

$$= k\, |G(f)|^2\, e^{-j2\pi fT}$$

นำ inverse Fourier ของ (4.17) ได้ (ให้ที่ sample $t = T$)

$$g_o(T) = \int_{-\infty}^{\infty} G_o(f)\, e^{j2\pi fT}\, df$$

$$= k \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\, df}_{=E\text{, Rayleigh's energy theorem}} \qquad : E = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\, df$$

$$= kE$$

ดังนั้น $$g_0(T) = kE \qquad (4.18)$$

แทน (4.14) ลงใน (4.7) เพื่อหา average output noise power

$$E[n^2(t)] = k^2 \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \, df$$

$$= k^2 N_0 \frac{E}{2} \qquad (4.19)$$

และ

$$\eta_{max} = \frac{(kE)^2}{k^2 N_0 \frac{E}{2}} = \frac{2E}{N_0} \qquad (4.20)$$

เมื่อ E/N_0 เรียกว่า signal energy-to-noise spectral density ratio