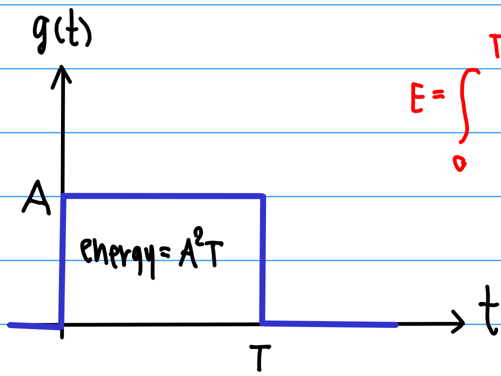
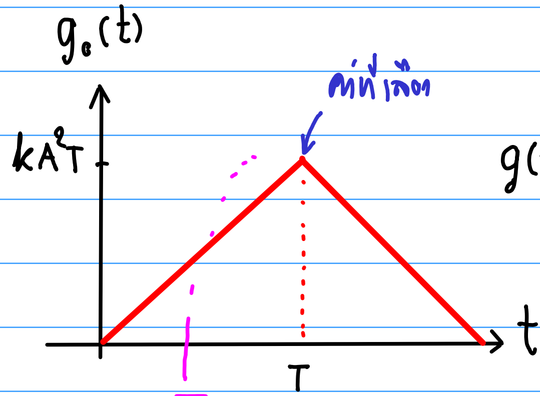
Ex*



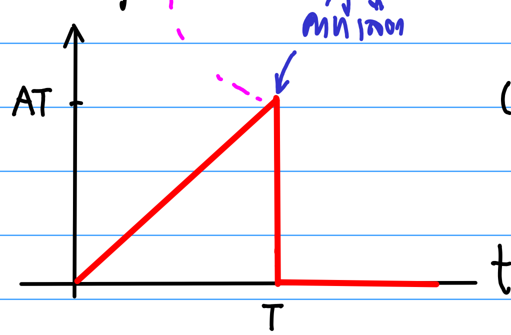
$$E = \int_0^T |\cancel{g(t)}^{\,A}|^2 dt$$



$$g(t) * \underbrace{h_{opt}(t)}_{} = g_0(T) = k\cancel{E}^{\,A^2T}$$

$k\,g(T-t)$

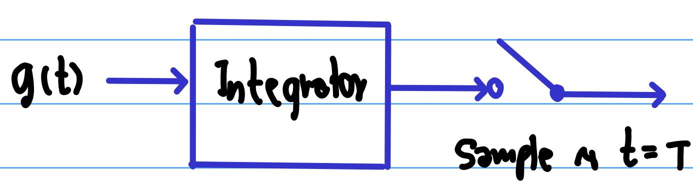
o/p ของ integrate-and-dump circuit



(t)

ให้ $kA = 1$

มีวงจรอยู่แค่



4.3 Error Rate Due to Noise

ให้ PCM system (binary) based on polar non-return-to-zero (NRZ) signaling

channel noise เป็น additive white Gaussian noise ที่มี mean เป็น zero และ power spectral density เท่ากับ $\frac{N_0}{2}$

เราสามารถแทนแบบจำลองได้ดังรูป

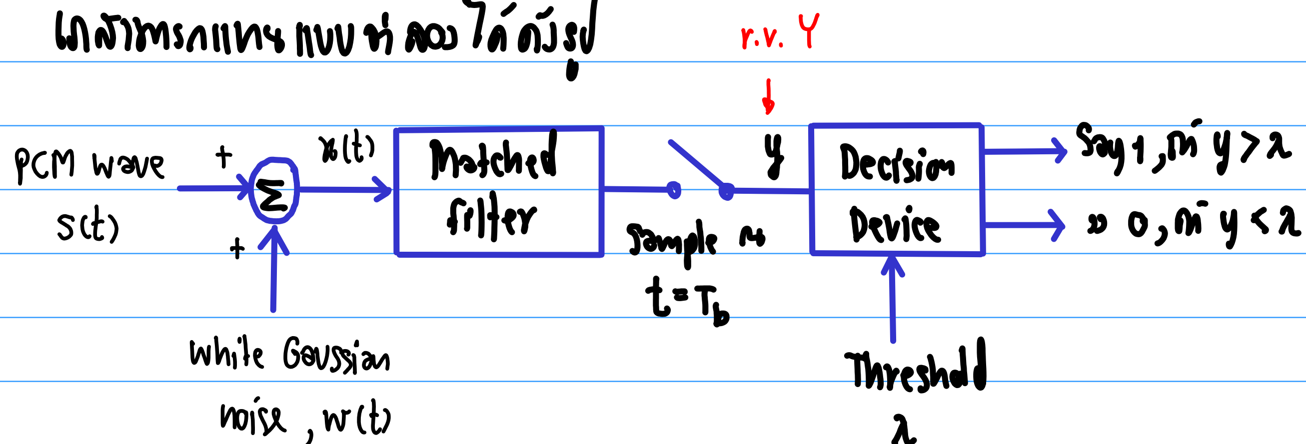


Fig: Receiver สำหรับ baseband transmission (polar NRZ)

ให้ T_b เป็นระยะเวลาในการส่ง pulse 1 bit

ได้ received signal ดังสมการ

$$x(t) = \begin{cases} +A + w(t), & \text{symbol 1 ถูกส่ง} \\ -A + w(t), & \text{symbol 0 ถูกส่ง} \end{cases} \qquad (4.21)$$

จากรูปจะได้เงื่อนไขของการเกิด error 2 แบบ

1. Symbol "0" ถูกส่ง แต่เครื่องรับ decision เป็น "1" เรียกว่า error of first kind
2. Symbol "1" ถูกส่ง แต่เครื่องรับ decision เป็น "0" เรียกว่า error of second kind

ในการวิเคราะห์ error เริ่มตั้งแต่ สมมติว่า Symbol "0" ถูกส่ง

จากสมการ (4.21) ได้

$$x(t) = -A + w(t), \qquad 0 \le t \le T_b \qquad (4.22)$$

จาก EX* ให้ $kAT_b = 1$ แทนได้

$$y = \int_0^{T_b} x(t)\,dt$$

$$= -A + \frac{1}{T_b}\int_0^{T_b} w(t)\,dt \qquad (4.23)$$

ใช้คุณสมบัติของ การเป็น Gaussian ได้ Y เป็น Gaussian < mean ✓ / variance ✓

mean:

$$E[Y] = E\left[-A + \frac{1}{T_b}\int_0^{T_b} w(t)\,dt\right]$$

$$= E[-A] + \frac{1}{T_b}\int_0^{T_b} \underbrace{E[w(t)]}_{0}\,dt$$

$$= -A$$

variance:

$$\sigma_Y^2 = E[(Y-\mu_Y)^2] = E[(Y+A)^2]$$

$$= E\left\{\left[\underbrace{\left(\cancel{-A} + \frac{1}{T_b}\int_0^{T_b} w(t)\,dt\right)}_{Y} + \cancel{A}\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{T_b^2} E\left[\int_0^{T_b} w(t) \int_0^{T_b} w(u)\, dt\, du \right]$$

$$= \frac{1}{T_b^2} \int_0^{T_b}\int_0^{T_b} \underbrace{E\left[(w(t)\, w(u)\right]}_{R_w(t,u)} dt\, du$$

$$= \frac{1}{T_b^2} \int_0^{T_b}\int_0^{T_b} \underbrace{R_w(t,u)}_{\mathcal{F}^{-1}\{\underbrace{S_w(f)}_{\frac{N_0}{2}}\}}\, dt\, du \qquad (4.24)$$

Y ได้

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{T_b^2} \int_0^{T_b}\int_0^{T_b} \frac{N_0}{2} \delta(t-u)\, dt\, du$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T_b^2} \int_0^{T_b} \frac{N_0}{2} \underbrace{\int_0^{T_b} \delta(t-u)\, dt}_{=1}\, du}_{T_b \frac{N_0}{2}}$$

$$= \frac{N_0}{2T_b} \qquad (4.26)$$

และเราจะได้ conditional probability density function ของ r.v. Y

เมื่อ "0" ถูกส่ง เป็น

$$f_Y(y|0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}}\, e^{-\left(\frac{(y+A)^2}{N_0/T_b}\right)} \qquad (4.27)$$

ให้ p_{10} แทน Conditional probability ของ error เมื่อ symbol "0" ถูกส่ง

และ

$$p_{10} = P(y > \lambda \mid \text{symbol "0" ถูกส่ง})$$

$$= \int_{\lambda}^{\infty} f_Y(y|0)\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\left(\frac{(y+A)^2}{N_0/T_b}\right)}\, dy \qquad (4.28)$$

ทุ่งหาก

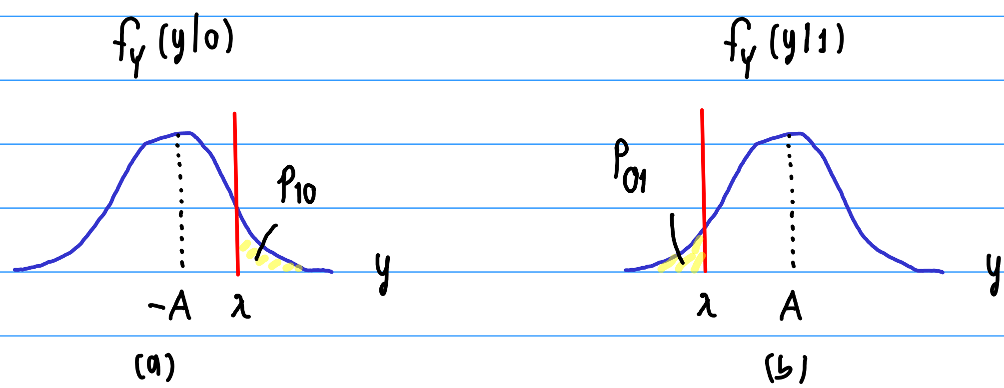


Fig. (a) pdf ของ r.v. Y ณ matched filter o/p เมื่อ "0" ถูกส่ง
(b) " " เมื่อ "1" ถูกส่ง

นิยาม Complementary error function (เกี่ยวพันกับ Gaussian distribution)

$$\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u}^{\infty} \exp(-z^2)\, dz$$

ถ้า u มีค่ามากๆ และ เราได้ upper bound ของ complementary error function เป็น

$$\operatorname{erfc}(u) < \frac{\exp(-u^2)}{\sqrt{\pi}\, u} \qquad (4.30)$$

นิยาม

$$z = \frac{y+A}{\sqrt{N_0/T_b}}$$

แล้ว จาก (4.28) ได้

$$p_{10} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(A+\lambda)/\sqrt{N_0/T_b}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A+\lambda}{\sqrt{N_0/T_b}} \right) \qquad (4.31)$$

ในทำนองเดียวกัน สมมติ "1" ถูกส่ง และได้

$$f_Y(y|1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}}\, e^{-\left(\frac{(y-A)^2}{N_0/T_b}\right)} \qquad (4.32)$$

และ

$$p_{01} = P(y < \lambda \mid \text{symbol "1" ถูกส่ง})$$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda} f_Y(y|1)\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\left(\frac{(y-A)^2}{N_0/T_b}\right)}\, dy \qquad (4.33)$$

ให้ $$z = \frac{A-y}{\sqrt{N_0/T_b}}$$

แต่ (4.33) จะได้

$$P_{01} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(A-\lambda)/\sqrt{N_0/T_b}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{A-\lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right) \qquad (4.34)$$

Prob ของการส่ง "0", "1" ที่ทางฝั่งส่งแน่ๆ

ให้ p_0 และ p_1 แทน priori probability ของการส่ง Symbols "0" และ "1" ตามลำดับ

แต่

$$P_e = p_0 P_{10} + p_1 P_{01}$$

$$= \frac{p_0}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{A+\lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right) + \frac{p_1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{A-\lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right) \qquad (4.35)$$

ต่อไป เราจะหา λ ที่ minimize P_e