เราจะศึกษาการแทนสัญญาณที่มีพลังงานต่ำสุด ต่อมาเราจะศึกษา

สำหรับเงื่อนไขพื้นฐานที่สำคัญในการออกแบบระบบสื่อสารแบบ band pass

บทนำ

เคยศึกษามาแล้ว Block diagram ของระบบสื่อสารแบบ digital ทั่วไป

ได้ดังรูป $\{m_i\} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \{s_i(t)\}$

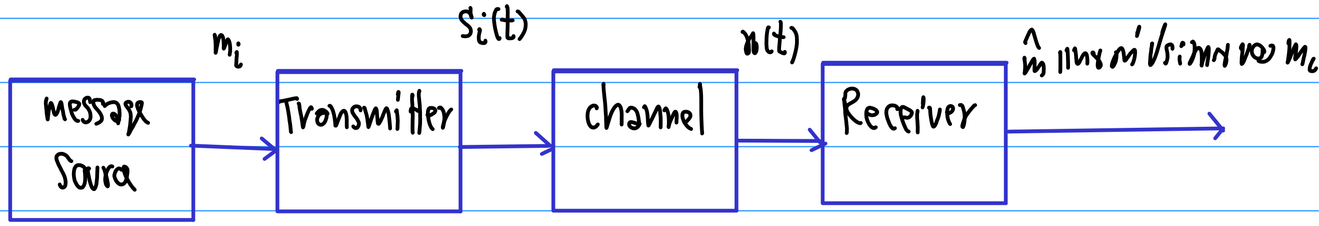

Fig. Block diagram ของ digital communication system

ให้ อักษร (Symbol) M แทนกับเซตของสัญลักษณ์ $m_1, m_2, \ldots, m_M$

เขียนแทนด้วย $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_M\}$

ให้ message source ก่อให้เกิดหนึ่งสัญลักษณ์ทุกๆ T วินาที

สมมติให้แต่ละสัญลักษณ์เกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากัน

$$P_i = P(m_i) = \frac{1}{M}, \quad i = 1, \ldots, M \qquad (5.1)$$

ให้ $s_i(t)$ เป็น real-valued energy signal และ

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t)\,dt, \qquad i = 1, 2, \dots, M \qquad (5.2)$$

สมมติให้ channel มีคุณลักษณะ ดังนี้

1) channel เป็น linear i.e no distortion

2) channel noise เป็น zero-mean $\underbrace{\text{additive white Gaussian noise process}}_{\text{AWGN}}$

ได้

$$x(t) = s_i(t) + w(t), \qquad \begin{cases} 0 \le t \le T \\ i = 1, 2, \dots, M \end{cases} \qquad (5.3)$$

แบบจำลองของ channel สามารถแสดงได้ดังรูป

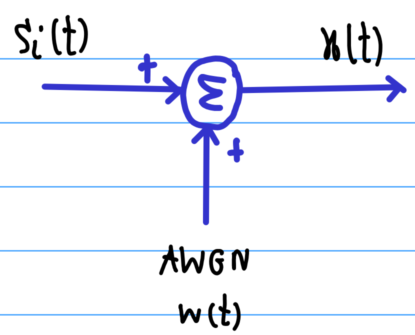

Fig: AWGN model ของ channel

ปัญหาคือ average probability of symbol error เป็น

$$P_e = \sum_{i=1}^{M} p_i \cdot P(\hat{m} \neq m_i \mid m_i) \qquad (5.4)$$

เป้าหมายคือ ต้องการออกแบบระบบสื่อสาร ที่ทำให้ P_e ต่ำสุด และเรียก P_e ต่ำสุดนี้ว่า optimum in the minimum probability of error

Geometric Representation ของ Signals

Geometric Representation ของ Signals หมายถึง การแทนเซตของ M energy signal, $\{s_i(t)\}_{i=1}^{M}$ ในรูป linear combination ของ N orthonormal basis functions เมื่อ $N \leq M$

ให้ $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{N}$ เป็นเซตของ orthonormal basis functions ที่เป็นจำนวนจริง

ให้ $s_i(t)$ แต่ละสัญญาณใช้ระยะเวลา T วินาที แล้ว

เขียนสมการแทน

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^{N} s_{ij}\,\phi_j(t), \quad \begin{cases} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, 2, \ldots, M \end{cases} \qquad (5.5)$$

และออกแบบได้ดังรูป a)

สัมประสิทธิ์ของการกระจาย นิยามเป็น

$$s_{ij} = \int_0^T s_i(t)\,\phi_j(t)\,dt, \quad \begin{cases} i = 1, \ldots, M \\ j = 1, \ldots, N \end{cases} \qquad (5.6)$$

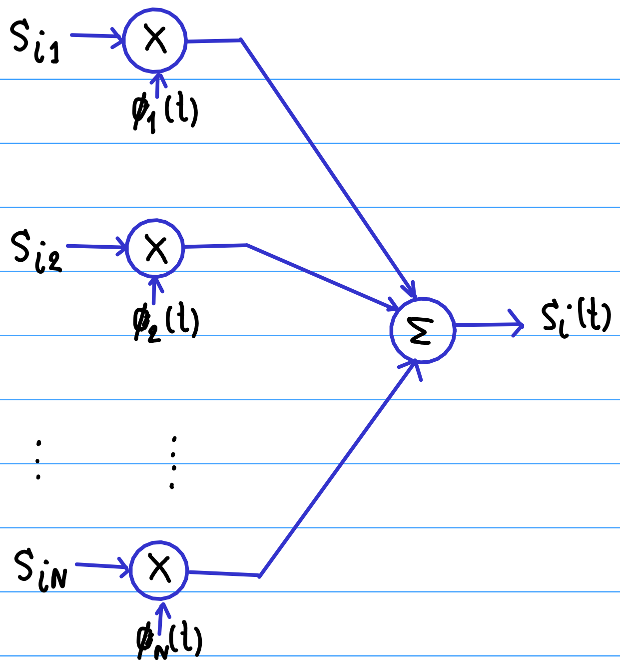

Fig a: การสังเคราะห์การก่อกำเนิด $s_i(t)$

การที่ $\phi_j(t)$ เป็น orthonormal เพราะว่า

$$\int_0^T (\phi_j(t))^2 dt = 1 \quad : \text{normal} \quad \text{และ}$$

$$\int_0^T \phi_j(t)\,\phi_k(t)\,dt = 0 \quad \text{เมื่อ } j \neq k \quad : \text{orthogonal}$$

ดังนั้น จึงได้ว่า

$$\int_0^T \phi_j(t)\,\phi_k(t)\,dt = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } j = k \\ 0 & \text{ถ้า } j \neq k \end{cases} \tag{5.7}$$

เมื่อ δ_{jk} เป็น Kronecker delta

จาก (5.6) นั่นคือ

$$s_{ij} = \int_0^T s_i(t)\,\phi_j(t)\,dt, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, M \\ j = 1, \dots, N \end{cases} \tag{5.6}$$

สามารถแทนในรูประบบเชิงเรขาคณิต ได้ดังรูป

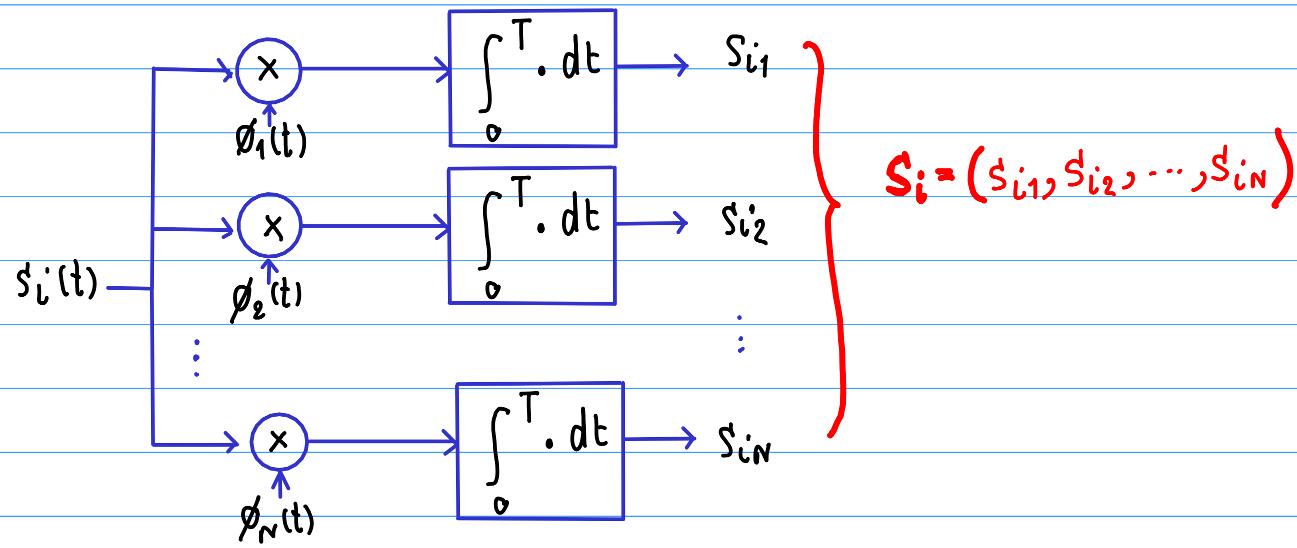

Fig b) การก่อกำเนิด เวกเตอร์ของ signal vectors, S_i

จาก (5.6) และ Fig b) เราได้ Vector ของสัมประสิทธิ์ เป็น

$$\underbrace{S_i = \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \\ \vdots \\ s_{iN} \end{bmatrix}}_{\text{signal vector}}, \quad i = 1, 2, \dots, M \tag{5.8}$$

เรียก Signal vector S_i เป็นตัวแทน ของ $s_i(t)$

$s_1(t) \longmapsto \mathbf{s}_1$

$s_2(t) \longmapsto \mathbf{s}_2$

$\vdots$

$s_N(t) \longmapsto \mathbf{s}_N$

เราเรียก N ว่า N-dimensional Euclidean space

และเมื่อประยุกต์กับ communication system มักเรียก N ว่า

signal space

ในการออกแบบระบบสัญญาณต่อ vectors ใน signal space มักเกี่ยวข้องกับการวัดทาง vector ดังนี้

length หรือ norm ของ signal vector, $\mathbf{s}_i$ เขียนแทนด้วย

$$\|\mathbf{s}_i\|$$

และ squared-length ของ $\mathbf{s}_i$ นิยามจาก inner product หรือ dot product ของ $\mathbf{s}_i$ กับ $\mathbf{s}_i$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_i\|^2 &= \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i \\ &= \sum_{j=1}^{N} s_{ij}^2 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \tag{5.9}$$

จาก (5.2)

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t)\,dt$$

แทนค่า (5.5) แล้วได้

$$E_i = \int_0^T \left[\sum_{j=1}^{N} s_{ij}\,\phi_j(t)\right]\left[\sum_{k=1}^{N} s_{ik}\,\phi_k(t)\right] dt$$

จัดรูปได้

$$E_i = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} s_{ij}\,s_{ik}\int_0^T \phi_j(t)\,\phi_k(t)\,dt \qquad (5.11)$$

จาก (5.7) ได้

$$E_i = \sum_{j=1}^{N} s_{ij}^2 \qquad (5.12)$$

$$= \|\mathbf{s}_i\|^2 \qquad : \text{จาก } (5.9)$$

นอกจากนี้ยังพบว่า

$$\underbrace{\int_0^T s_i(t)\,s_k(t)\,dt}_{\text{inner product ของ signal } s_i(t) \text{ และ } s_k(t)} = \underbrace{\mathbf{s}_i^T\mathbf{s}_k}_{\text{inner product ของ representation vector ที่สอดคล้องกัน}} \qquad (5.13)$$

และ ยังพบว่า

$$\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\|^2 = \sum_{j=1}^{N} (s_{ij} - s_{kj})^2 \qquad (5.14)$$

$$= \int_0^T (s_i(t) - s_k(t))^2 \, dt$$

เมื่อ $\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\|$ เรียกว่า Euclidean distance, d

สังเกตว่า d แทน ที่ระยะห่างระหว่าง จุด ที่แทนในรูป เวกเตอร์ $\mathbf{s}_i$ และ $\mathbf{s}_k$

มุมระหว่าง $\mathbf{s}_i$ และ $\mathbf{s}_k$ หาได้จาก

$$\cos\theta_{ik} = \frac{\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_k}{\|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{s}_k\|} \qquad (5.15)$$

Ex ให้ $s_1(t)$ และ $s_2(t)$ เป็น energy signal และเมื่อประยุกต์

ใช้อสมการของ schwarz ได้ว่า

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, s_2(t)\, dt\right)^2 \underset{\substack{= \\ s_2(t) = c s_1(t)}}{\le} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)\, dt\right) \qquad (5.16)$$

เพราะได้ $s_1(t) = s_{11}\phi_1(t) + s_{12}\phi_2(t)$ จาก (5-5)

$$s_2(t) = s_{21}\phi_1(t) + s_{22}\phi_2(t)$$

ได้ vector signals ที่แทน $s_1(t)$, $s_2(t)$ เป็น

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix}$$

ดังรูป

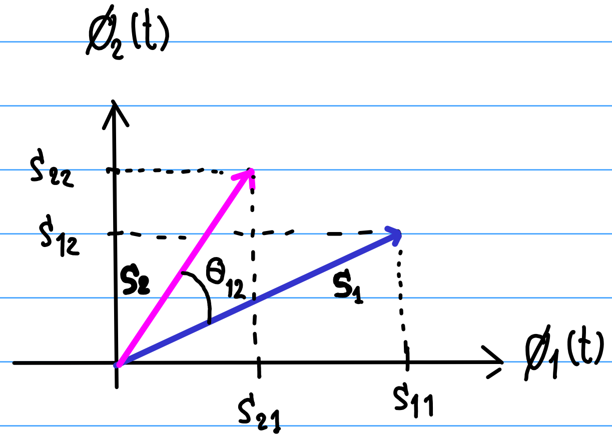

Fig: การให้ Vectors แทน Signal $s_1(t)$ และ $s_2(t)$

และได้

$$\cos\theta_{12} = \frac{\mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_2}{\|\mathbf{s}_1\| \|\mathbf{s}_2\|}$$

$$= \frac{\int_0^T s_i(t)\, s_k(t)\, dt}{\left(\int_0^T s_i^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T s_k^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (5.17)$$

เพราะว่า $\|s_i\|^2 = \int_0^T s_i(t)\, dt$

เมื่อประยุกต์ (5.16) ได้

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, s_2(t)\, dt \right|^2 \underset{=\text{ เมื่อ } s_2(t) = c\, s_1(t)}{\leq} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s_1(t)|^2 dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s_2(t)|^2 dt \right)$$

ครั้งหน้าจะศึกษาการหา $\phi_j(t)$, $j = 1, \dots, N$