เมื่อ กำหนด $\{s_i(t)\}_{i=1}^{M}$ เราจะหา $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{N}$ ได้อย่างไร

คำตอบ คือ เราสามารถหาได้ โดยวิธีการของ Gram-Schmidt Orthogonalization Procedure

สมมติ เซตของ M signals แทนด้วย $\{s_1(t), s_2(t), \ldots, s_M(t)\}$

<u>เริ่มต้นกับ</u> นิยามให้

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} \quad : \phi_1(t) \text{ มี energy เท่า } 1 \qquad (5.19)$$

เมื่อ E_1 แทน พลังงาน ของ signal $s_1(t)$ และเราได้

$$s_1(t) = \sqrt{E_1}\,\phi_1(t) \qquad (5.20)$$
$$= s_{11}\,\phi_1(t)$$

<u>ต่อไป</u> ใช้ $s_2(t)$ และนิยาม s_{21}

$$s_{21} = \int_0^T s_2(t)\,\phi_1(t)\,dt \qquad (5.21)$$

นิยาม ตัวแปร ใช้ชั่วคราว

$$g_2(t) = s_2(t) - s_{21}\,\phi_1(t) \qquad (5.22)$$

ได้

$$\phi_2(t) = \frac{g_2(t)}{\sqrt{\int_0^T g_2^2(t)\,dt}} \qquad (5.23)$$

แทนค่า (5.22) ลงใน (5.23) ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้

$$\phi_2(t) = \frac{g_2(t)}{\sqrt{E_2 - s_{21}^2}} \qquad (5.24)$$

เมื่อ E_2 เป็น energy ของ signal $s_2(t)$

ต่อไป

$$g_i(t) = s_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij}\,\phi_j(t) \qquad (5.25)$$

เมื่อ

$$s_{ij} = \int_0^T s_i(t)\,\phi_j(t)\,dt, \quad j = 1, 2, \dots i-1 \qquad (5.26)$$

จะได้

$$\phi_i(t) = \frac{g_i(t)}{\sqrt{\int_0^T g_i^2(t)\,dt}} \qquad i = 1, 2, \dots, N \qquad (5.27)$$

* ถ้า $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$ อยู่ในรูป เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

แต่ $N = M$

* ถ้า $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

แต่ $N < M$

5.3 การแปลง Continuous AWGN channel into a Vector channel

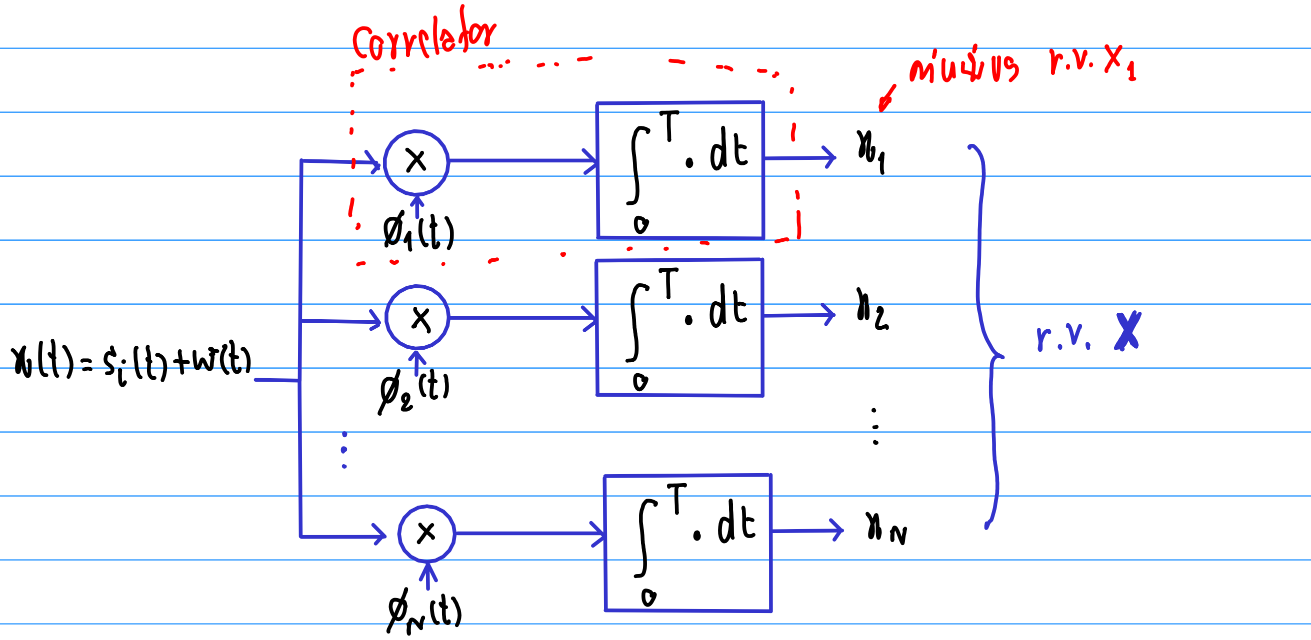

Fig : Correlators o/p

สรุปได้ว่า

$$x(t) = s_i(t) + w(t) = s_i(t) + \underbrace{w'(t)}_{\text{ไม่ span โดย basis fn}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} w_j \phi_j(t)}_{\text{noise ที่ span โดย } \{\phi_j(t)\}_{j=1}^{N}} \qquad (5.28)$$

สำหรับ $0 \le t \le T$, $i = 1, 2, \dots, M$

โดย $w(t)$ เป็น sample fn ของ AWGN ที่มี mean ศูนย์ และ power spectral density $N_0/2$

สรุปได้

$$x_j = \int_0^T x(t)\,\phi_j(t)\,dt \qquad (5.29)$$

$$= s_{ij} + w_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

เมื่อ

$$s_{ij} = \int_0^T s_i(t)\,\phi_j(t)\,dt \quad \text{และ} \qquad (5.30)$$

$$w_j = \int_0^T w(t)\,\phi_j(t)\,dt \qquad (5.31)$$

นิยาม a new random process $X'(t)$ ที่ sample function เป็น $x'(t)$

ได้ดังสมการ

$$x'(t) = x(t) - \sum_{j=1}^{N} x_j\,\phi_j(t) \qquad (5.32)$$

ส่วนของ $x(t)$ ไม่ span โดย $\phi_j(t)$

แทนค่า (5.28) และ (5.29) ใน (5.32) และกระจายได้

$$x'(t) = s_i(t) + w(t) - \sum_{j=1}^{N} (s_{ij} + w_j)\,\phi_j(t)$$

$$= s_i(t) + w(t) - \underbrace{\sum_{j=1}^{N} s_{ij}\,\phi_j(t)}_{s_i(t)} - \sum_{j=1}^{N} w_j\,\phi_j(t)$$

$$= w(t) - \sum_{j=1}^{N} w_j\,\phi_j(t) \underset{(5.28)}{=} w'(t) \qquad (5.33)$$

จาก (5.32) และ (5.33) เราได้

$$x(t) = \sum_{j=1}^{N} x_j \phi_j(t) + x'(t)$$
$$= \sum_{j=1}^{N} x_j \phi_j(t) + w'(t) \qquad (5.34)$$

สมการ (5.34) นี้บ่งบอกว่า $x(t)$ ซึ่งออกจากช่องสัญญาณ ประกอบ

ด้วย ส่วนของ $x(t)$ ที่ span โดย $\phi_j(t)$ และ ส่วนของ

noise ที่ไม่ span โดย $\phi_j(t)$ นั่นคือ $w'(t)$

statistical characterization ของ Correlator o/p

ให้ X_j แทน r.v. ที่ได้จาก o/p ของ Correlator ที่ $j = 1, 2, \dots, N$

เนื่องจาก $X(t)$ เป็น Gaussian Process จึงได้ว่า X_j เป็น Gaussian r.v

ให้ W_j เป็น r.v. ที่ได้จาก o/p ของ correlator ที่ตอบสนอง

ต่อ white Gaussian noise ด้วย sample function $w(t)$

เราได้

$$\mu_{X_j} = E[X_j]$$
$$= E[s_{ij} + W_j]$$

$$= s_{ij} + \cancelto{0}{E[W_j]}$$

$$= s_{ij} \tag{5.35}$$

หา: Variance ของ X_j

$$\sigma^2_{X_j} = E[(X_j - s_{ij})^2]$$

$$= E[W_j^2] \tag{5.36}$$

เมื่อ

$$W_j = \int_0^T W(t)\phi_j(t)\,dt$$

แทนค่าใน (5.36) ได้

$$\sigma^2_{X_j} = E\left[\int_0^T W(t)\phi_j(t)\,dt \int_0^T W(u)\phi_j(u)\,du\right]$$

$$= E\left[\int_0^T\int_0^T \phi_j(t)\phi_j(u)\,W(t)\,W(u)\,dt\,du\right] \tag{5.37}$$

ได้

$$\sigma^2_{X_j} = \int_0^T\int_0^T \phi_j(t)\phi_j(u)\,E[W(t)\,W(u)]\,dt\,du$$

$$= \int_0^T \int_0^T \phi_j(t)\phi_j(u)\, \underbrace{R_w(t,u)}_{\text{Stationary process}}\, dt\, du \qquad (5.38)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}\right\} = \frac{N_0}{2}\delta(t-u)$$

ได้

$$\sigma_{X_j}^2 = \frac{N_0}{2}\int_0^T \int_0^T \phi_j(t)\phi_j(u)\,\delta(t-u)\,dt\,du \quad : \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt = 1$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T \cancel{\phi_j^2(t)}^{\,1}\,dt \qquad (5.40)$$

นั่นคือ

$$\sigma_{X_j}^2 = \frac{N_0}{2} \quad , j = 1, \ldots, N \qquad (5.41)$$

เนื่องจาก ตกลงเป็นอิสระต่อกัน (ไม่เป็นอิสระต่อกัน) สัญญาณที่ใช้ตัวกรองแบบ

ใช้เกาส์เซียน จึงทำให้ค่าตัวตรวจสอบ ที่ X_j และ X_k สำหรับ $j \neq k$ เป็นอิสระ

ต่อกันเช่นกัน ได้

$$COV[X_j X_k] = E[(X_j - \underbrace{\mu_{X_j}}_{s_{ij}})(X_k - \underbrace{\mu_{X_k}}_{s_{ik}})]$$

$$= E[W_j W_k]$$

$$= E\left[\int_0^T w(t)\phi_j(t)\,dt \int_0^T w(u)\phi_k(u)\,du\right]$$

$$= \int_0^T \int_0^T \phi_j(t)\phi_k(u)\, R_w(t,u)\, dt\, du$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \phi_j(t)\phi_k(u)\, \delta(t-u)\, dt\, du$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_0^T \underbrace{\phi_j(t)\, \phi_k(t)}_{0}\, dt$$

$$= 0$$

เพราะว่า $\mathrm{cov}(X_j X_k) = 0$ และ Gaussian แสดงว่า statistically independent

ดังนั้น

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}$$

โดย X_i และ X_j สำหรับ $i \neq j$ เป็น อิสระต่อกัน