การสอบปลายภาค:
188340 Princ. of Dig. Comm.: วันจันทร์ที่ 17 ก.ย.55 เวลา 09:00-12:00
(open-book)
หัวข้อ
✓ Baseband Pulse Transmission
✓ Signal-Space Analysis
Passband Data Transmission

188341 Princ. of Dig. Comm. Lab: วันพฤหัส 27 ก.ย. 55 เวลา 13:00-16:00
(closed-book, calculators are not permitted)
หัวข้อ DTC04-DTC10

เนื่องจาก

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}$$

มี X_i และ X_k ซึ่ง $i \neq k$ เป็นอิสระต่อกัน

เราสามารถใช้คุณสมบัติของ Probability ได้ Condition probability เป็น

$$f_X(x \mid m_i) = \prod_{j=1}^{N} f_{X_j}(x_j \mid m_i), \quad i = 1, 2, \ldots, M \qquad (5.44)$$

เรียก vector x ว่า observation vector และเรียก x_i, $i = 1, \ldots, N$ ว่า observation element และเราเรียกช่องสัญญาณที่สอดคล้องกับ (5.44) ว่า memoryless channel

เพราะว่า X_j เป็น Gaussian r.v. ซึ่งมี mean s_{ij} และ variance $N_0/2$ เราจึงได้

$$f_{X_j}(x_j \mid m_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{1}{N_0}(x_j - s_{ij})^2\right], \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots, N \\ i = 1, 2, \ldots, M \end{array} \qquad (5.45)$$

แทนค่า (5-95) ลงใน (5-94) จัดรูปได้

$$f_X(x|m_i) = (\pi N_0)^{-N/2} \exp\left[-\frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^{N} (x_j - s_{ij})^2 \right], \quad i = 1, 2, \ldots, M \quad (5\text{-}96)$$

เนื่องจาก noise process $w(t)$ เป็น Gaussian ที่มี mean ศูนย์

เราจึงได้ว่า $w'(t)$ เป็น Gaussian ที่มี mean ศูนย์

(ส่วนของ noise ที่ไม่ span ใน $\phi_j(t)$)

ดังนั้น เราจึงได้ว่า

$$E[X_j w'(t_k)] = 0, \quad \begin{cases} j = 1, 2, \ldots, N \\ 0 \leq t_k \leq T \end{cases} \quad (5\text{-}97)$$

(รายละเอียดของการพิสูจน์ในที่นี้ไม่ขอกล่าวถึง)

เนื่องจาก correlation เป็นศูนย์ สำหรับ Gaussian process นั้น

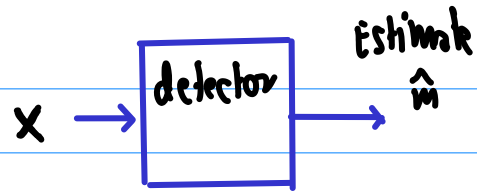
สมมูลกับ statistically independent สมมูลกับการตัดแบบ

ที่เกี่ยวกับ คือ ไม่ต้องสนใจ $w'(t)$ ที่ไม่ span ใน $\phi_j(t)$

จึงได้ข้อสรุปว่า

$$x = s_i + w, \quad i = 1, 2, \ldots, M$$

w เป็น vector ของ noise ที่ span ใน $\phi_j(t)$, $j = 1, \ldots, N$



ในการออกแบบ detector ที่ทำให้ probability ของการเกิด error ต่ำสุด จะต้องใช้ Likelihood functions

5.4 likelihood functions

likelihood function เขียนแทนด้วย $L(m_i)$ นิยามเป็น

$$L(m_i) = f_X(x \mid m_i), \qquad i = 1, 2, \dots, M \qquad (5.49)$$

และให้ log-likelihood function เขียนแทนด้วย $l(m_i)$ นิยามเป็น

$$l(m_i) = \log L(m_i), \qquad i = 1, 2, \dots, M \qquad (5.50)$$

คุณสมบัติที่สำคัญของ log-likelihood fn คือ

① log-likelihood fn มีความสัมพันธ์แบบ 1-1 กับ likelihood fn และ likelihood fn ไม่เป็นลบ

② log-likelihood fn เป็น monotonically increasing fn ของ argument

$l(\cdot)$

เขียนแทนค่า (5.46) ลงใน (5.50) จะได้

$$l(m_i) = -\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{N}(x_j - s_{ij})^2, \quad i = 1, \dots, M \qquad (5.51)$$

นั่นคือ ต้องไปหาค่าที่ likelihood สูง ทำให้ได้การออกแบบ detector

5.5 Coherent Detection ของ Signals ใน Noise: Maximum likelihood Decoding

สมมติ แต่ละ Symbol ถูกส่ง ทุกๆ T วินาที (slot ละ T วินาที)

และ $\{s_i(t)\}_{i=1}^{M}$ เป็น เซต ของ M possible signals

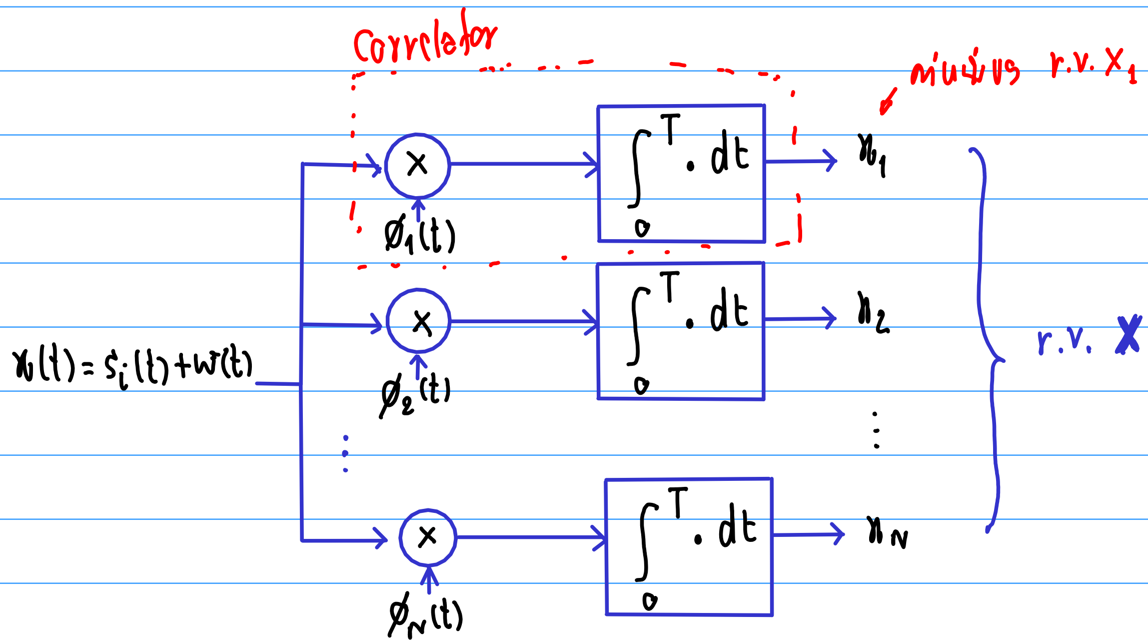


Fig: Correlators O/P

แต่ละ $s_i(t)$ ถูกส่งผ่าน channel ที่เป็น AWGN ที่มี mean ศูนย์ และ power spectral density ซึ่ง เป็น $S_W(f) = \frac{N_0}{2}$

เซตของ message point ที่สัมพันธ์กับ transmitted signal $\{s_i(t)\}_{i=1}^{M}$

เรียกว่า Signal constellation (i.e. เซตของ s_i, $i=1,\dots,M$)

ในการออกแบบ detector เรามีปัญหาดังนี้

“ กำหนด observation vector x แล้ว ทำการ mapping จาก x ไปยัง estimate $\hat{m}$ ของ transmitted symbol, m_i ด้วยวิธีที่ทำให้ probability ของ error ต่ำสุด ในขั้นตอน decision-making process ”

สมมติว่า กำหนด observation vector x เรา make decision เป็น $\hat{m} = m_i$ แล้วเกิด error เขียนแทนด้วย $P_e(m_i|x)$ นั่นคือ

$$P_e(m_i|x) = P(m_i \text{ not sent}|x) = 1 - P(m_i \text{ sent}|x) \tag{5.52}$$

จาก (5.52) เราสามารถเขียนในรูป optimum decision rule

ตั้งค่า $\hat{m} = m_i$ ถ้า

$$P(m_i \text{ sent}|x) \geq P(m_k \text{ sent}|x) \quad \text{สำหรับทุก } k \neq i \text{ และ } k=1,\dots,M \tag{5.53}$$

เราจะเรียก (5.53) ว่า maximum a posteriori probability (MAP rule)

ทำการประยุกต์กฎของ Bay ใน (5.53) ได้

ตัดสินใจ $\hat{m} = m_i$ ถ้า

$$\frac{p_k f_X(x|m_k)}{f_X(x)} \text{ เป็น maximum สำหรับ } k=i \qquad (5.54)$$

เมื่อ p_k เป็น priori probability ของการส่ง symbol m_k

<u>ข้อสังเกต</u>

1) $f_X(x)$ ไม่ขึ้นกับ symbol ที่ถูกส่ง

2) ตามสมมติให้ $p_k = p_i$ สำหรับ $\forall i,k \in \{1,\dots,M\}$

3) $f_X(x|m_k)$ มีความสัมพันธ์แบบ 1-1 กับ $l(m_k)$

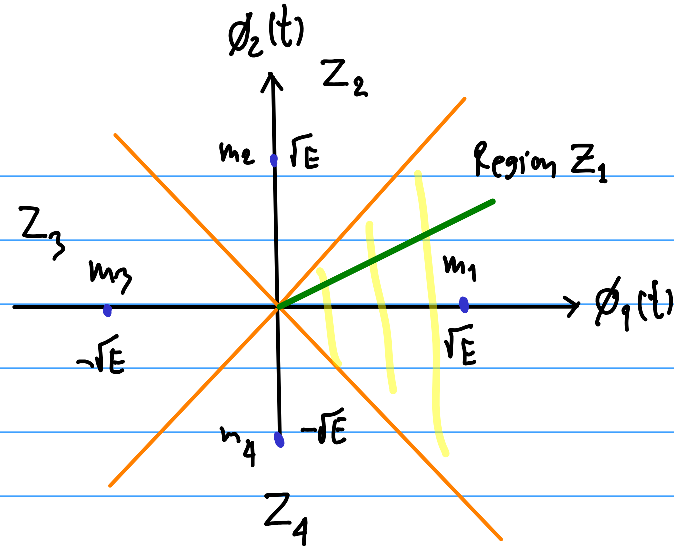
เราจึงได้ decision rule ของ (5.54) เป็น

ตัดสินใจ $\hat{m} = m_i$ ถ้า

$$l(m_k) \text{ เป็น maximum สำหรับ } k=i \qquad (5.55)$$

เพื่อให้ decision อยู่ในรูปวงจร เราจะใช้เครื่องมือทางเรขาคณิตในการเลือกโยง

ในที่นี้ ขอใช้ ต.ย. ประกอบ



สมมติ

$\{m_i\}_{i=1}^{4} \Leftrightarrow \{s_i(t)\}_{i=1}^{4}$

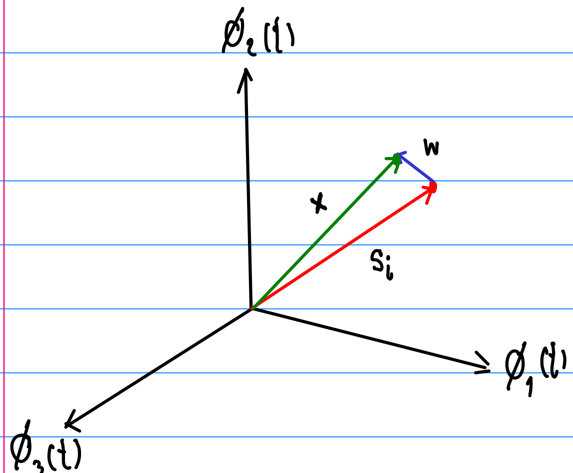
Correlator $\Rightarrow \{s_i\}_{i=1}^{4}$

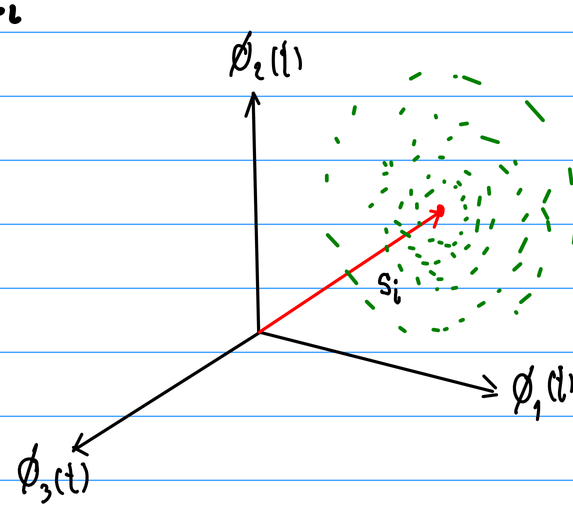
Fig : observation space

เกณฑ์: เงื่อนไขของประโยคใน (5.55) แปลความหมายได้ดังนี้

1) แบ่ง observation space ของ basis fn ออกเป็น M regions

2) เกณฑ์: ทำ decision $\hat{m}$ เป็น m_i ถ้า observation vector อยู่ใน region ที่ Z_i





จาก log-likelihood fn ใน (5.51) เราได้ว่า

Observation vector x อยู่ใน region Z_i ถ้า

$$\sum_{j=1}^{N} (x_j - s_{kj})^2 \quad \text{มีค่าน้อยที่สุด สำหรับ } k=j \qquad (5.57)$$

และจะได้

$$\sum_{j=1}^{N} (x_j - s_{kj})^2 = \| x - s_k \|^2 \qquad (5.58)$$

และจะได้

Observation vector x อยู่ใน region Z_i ถ้า

Euclidean distance $\|x - s_k\|$ เป็น minimum สำหรับ $k = i$ (5.59)

เมื่อ

$$\sum_{j=1}^{N} (x_j - s_{kj})^2 = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} x_j^2}_{\text{ไม่ขึ้นกับ } k} - 2 \sum_{j=1}^{N} x_j s_{kj} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} s_{kj}^2}_{E_k}$$

ได้

Observation vector x อยู่ใน region Z_i ถ้า

$\sum_{j=1}^{N} x_j s_{kj} - \frac{1}{2} E_k$ เป็น maximum สำหรับ $k = i$ (5.61)

เราได้วงจร ของ Detector ดังรูป

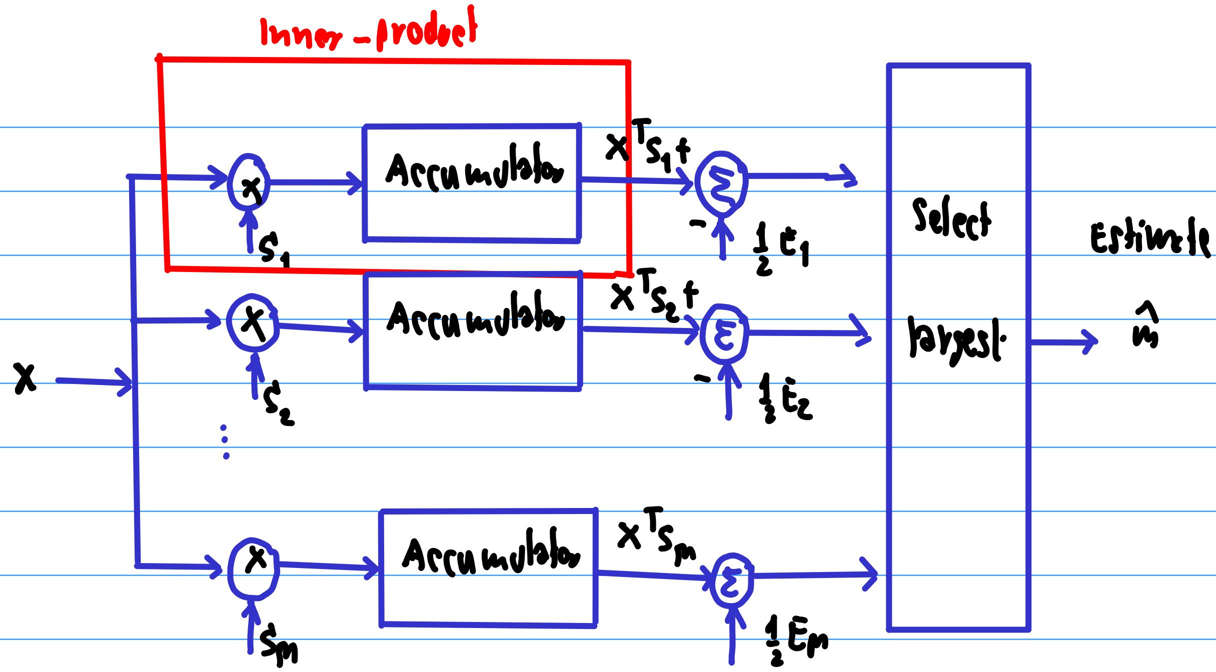


Fig: Decoder vs observation vector x