

บทที่ 3

วงจรความต้านทาน

Resistive Circuits

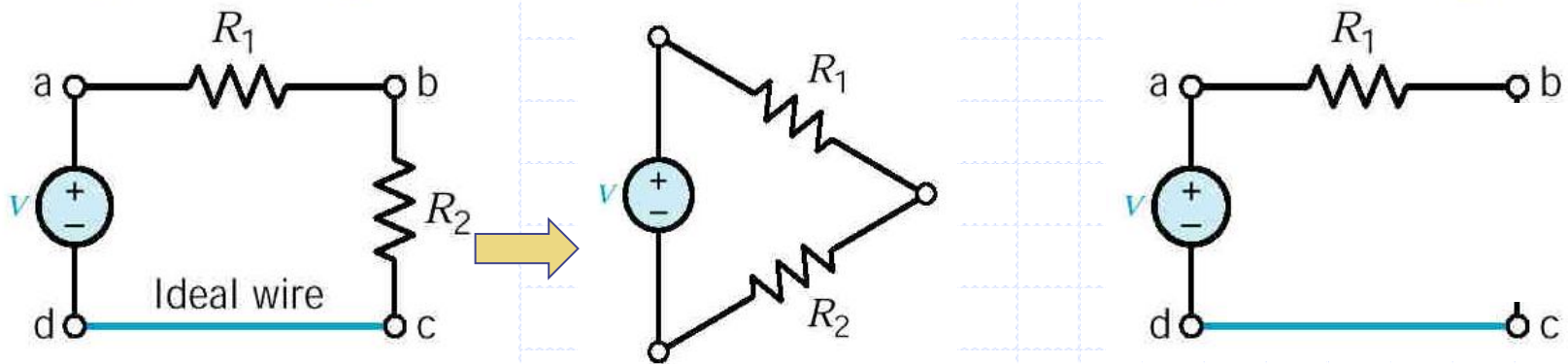
หัวข้อที่สำคัญในบทนี้

- *Kirchhoff's Laws*
 - *KCL (Kirchhoff's Current Law)*
 - *KVL (Kirchhoff's Voltage Law)*
- *การคำนวณหาความต้านทานรวม*
- *Voltage Divider (การแบ่งแรงดัน)*
- *Current Divider (การแบ่งกระแส)*

3.1 กฎของเคอชชอฟฟ์ (Kirchhoff's Law)

เป็นกฎที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ามาก แบ่งเป็น 2 กฎคือ

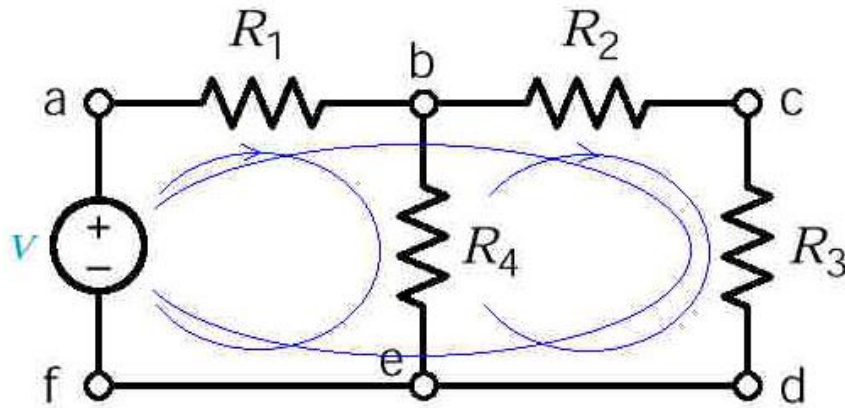
1. Kirchhoff's Voltage Law (KVL)
2. Kirchhoff's Current Law (KCL)



โหนด (Node) คือจุดต่อระหว่างองค์ประกอบวงจรตั้งแต่สองตัวขึ้นไปมาต่อกัน

ลูป (Loop) หรือวงรอบ คือถ้าเราเริ่มต้นจากขั้ว a ในรูปที่ 2.1 ไปเส้นทางในวงจร ผ่านโหนด b c และ d กลับมายังโหนด a อีกครั้งเราจะได้เส้นทางปิด (Closed Path)

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหาเส้นทางปิดทั้งหมดในวงจรในรูปข้างล่าง



วิธีทำ จากรูปพบว่า มีทั้งหมดสามเส้นทางปิด (3 loop) คือ

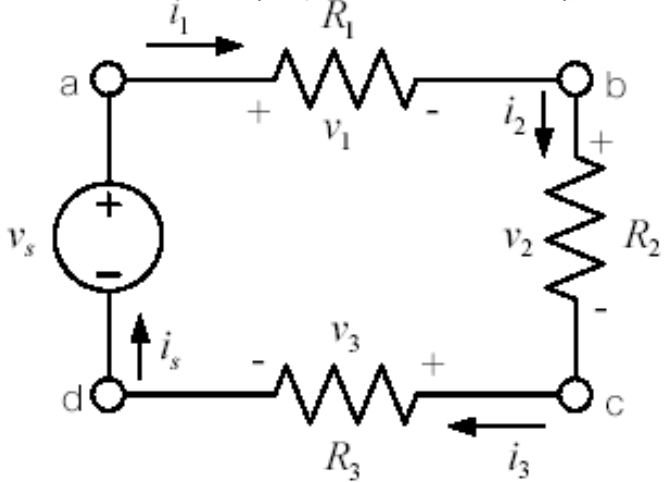
1. a-b-c-d-e-f-a
2. a-b-e-f-a
3. b-c-d-e-b

ข้อสังเกต:

- สังเกตว่า ลวดตัวนำในอุดมคติทำให้ข้อ d ข้อ e และข้อ f เป็นโนดเดียวกัน
- นิยมเขียน loop กระแส loop ตามเข็มนาฬิกา

ตัวอย่างการกำหนด

- ทิศทางการไหลของกระแส
- ขั้วบวก ลบ ของ แรงดัน

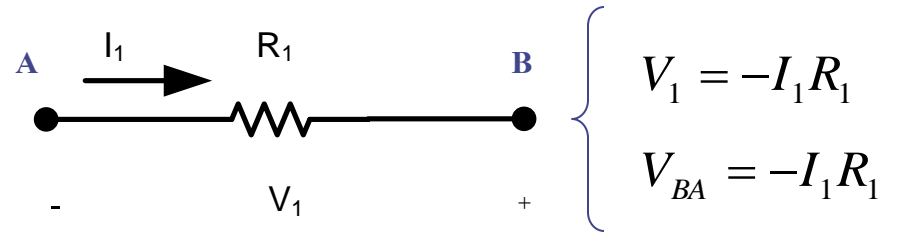
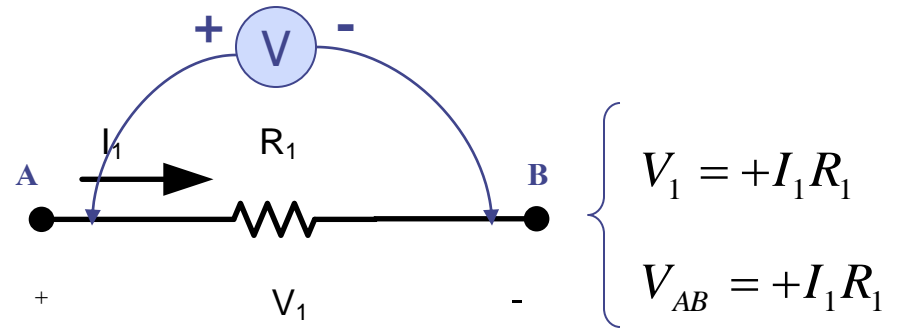


ข้อสังเกต

การกำหนดทิศทางการไหลของกระแส ขั้วบวกลบของแรงดัน จะเป็นแบบใดก็ได้ แต่ผลที่ตามมา ถ้าคำนวณคำตอบได้ค่า

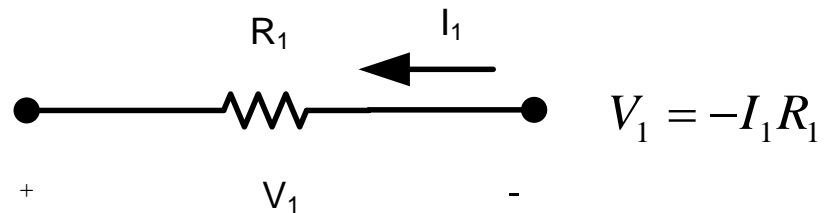
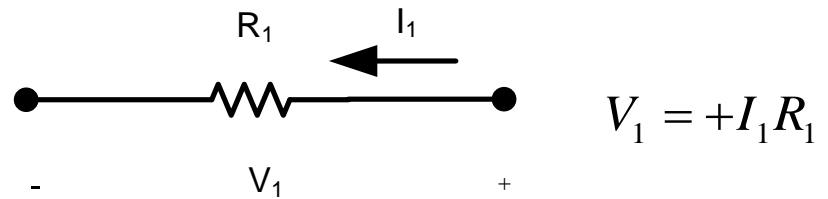
- เป็นบวกแสดงว่าทิศทางหรือขั้วที่กำหนดนั้นถูกต้อง
- เป็นลบแสดงว่าทิศทางหรือขั้วที่กำหนดนั้นตรงข้าม

ถ้าโจทย์กำหนดมาให้แล้วห้ามเปลี่ยนจากที่กำหนดมา



แสดงว่า

$$V_{BA} = -V_{AB}$$

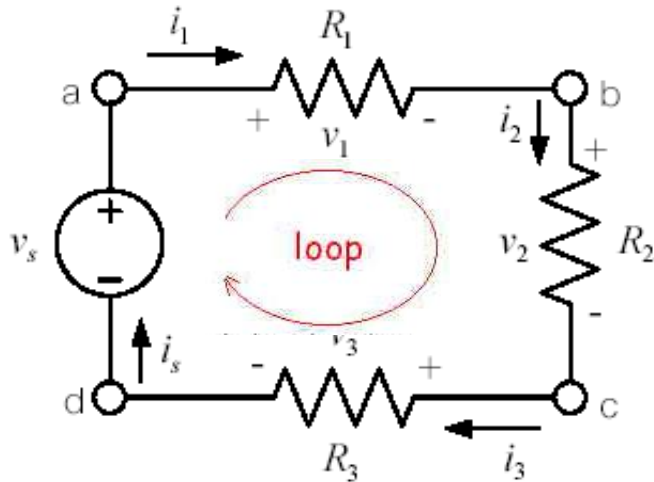


1. Kirchhoff's Voltage Law (KVL)

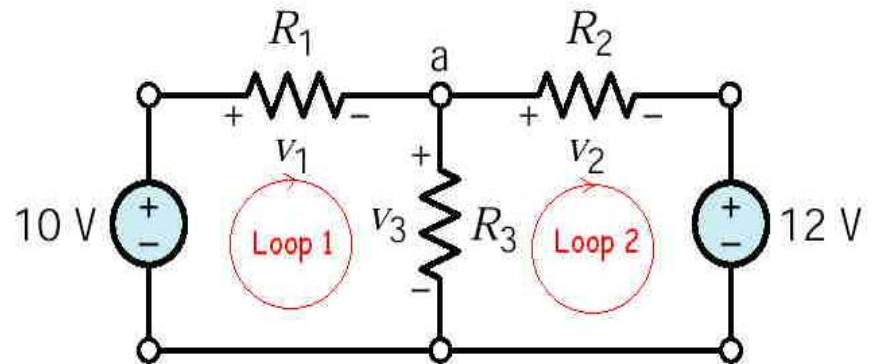
ผลบวกทางพีชคณิตของแรงดันรอบลูป(loop)ใดๆจะมีค่าเท่ากับศูนย์

$$\sum v = 0$$

กำหนดให้ กระแสที่ไหลเข้าอุปกรณ์ใดๆขาเข้าเป็นขั้ว+ ขาออกเป็นขั้ว -
ยกเว้นแหล่งจ่ายแรงดัน



$$v_1 + v_2 + v_3 - v_s = 0$$



Loop 1:

$$-10 + v_1 + v_3 = 0$$

Loop 2:

$$-v_3 + v_2 + 12 = 0$$

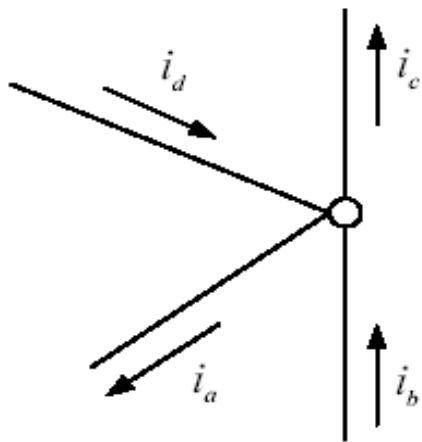
Loop 3 (outer loop): $-10 + v_1 + v_2 + 12 = 0$

2 Kirchhoff's Current Law (KCL)

ผลบวกทางพีชคณิตของกระแสที่ไหลเข้าสู่ Node ใดๆจะมีค่าเท่ากับศูนย์

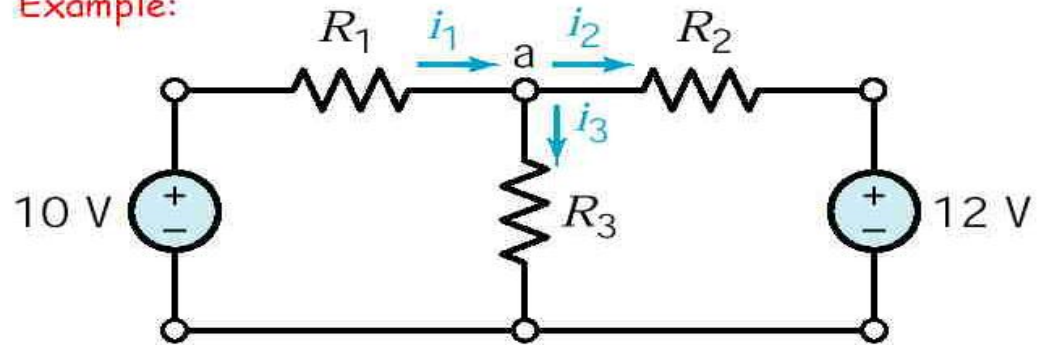
$$\sum i = 0$$

กำหนดให้ กระแสที่ไหลเข้าสู่ Node เป็น +
กระแสที่ไหลออกจาก Node เป็น -



$$-i_a + i_b - i_c + i_d = 0$$

Example:

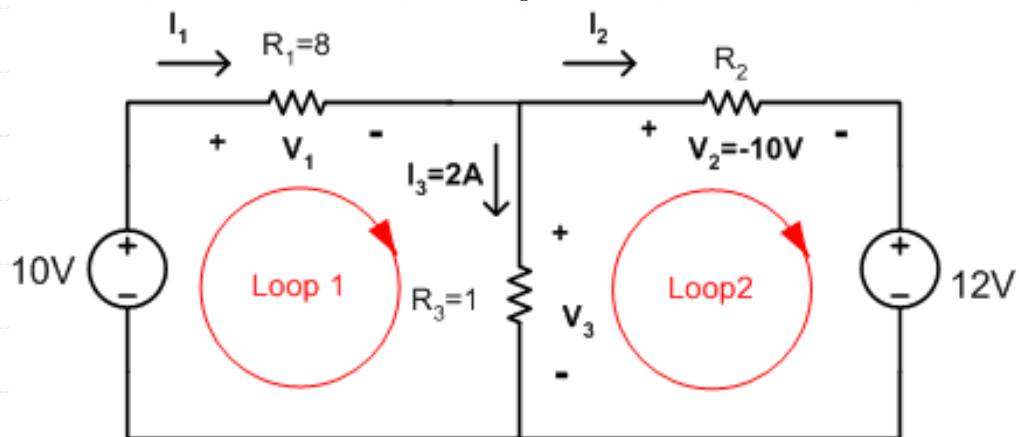
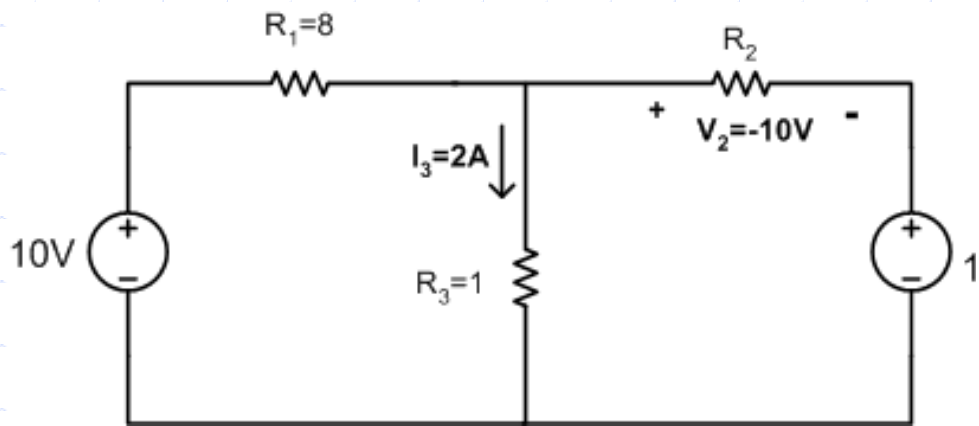


$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

หรือ $i_1 = i_2 + i_3$

ตัวอย่างที่ 3.2 จากวงจรจงคำนวณหาค่า R_2 , แรงดันคร่อม ค.ต.ท ทุกตัว

กำหนดให้ $R_1 = 8 \text{ ohms}$, $v_2 = -10V$, $i_3 = 2A$, $R_3 = 1 \text{ ohms}$



วิธีทำ จากโจทย์ คำนวณหาค่า V_3

$$v_3 = i_3 R_3 = 2 \times 1 = 2V$$

คำนวณหาค่า V_1

KVL:

$$+v_1 + v_3 - 10 = 0$$

$$+v_1 + 2 - 10 = 0$$

$$v_1 = 8V$$

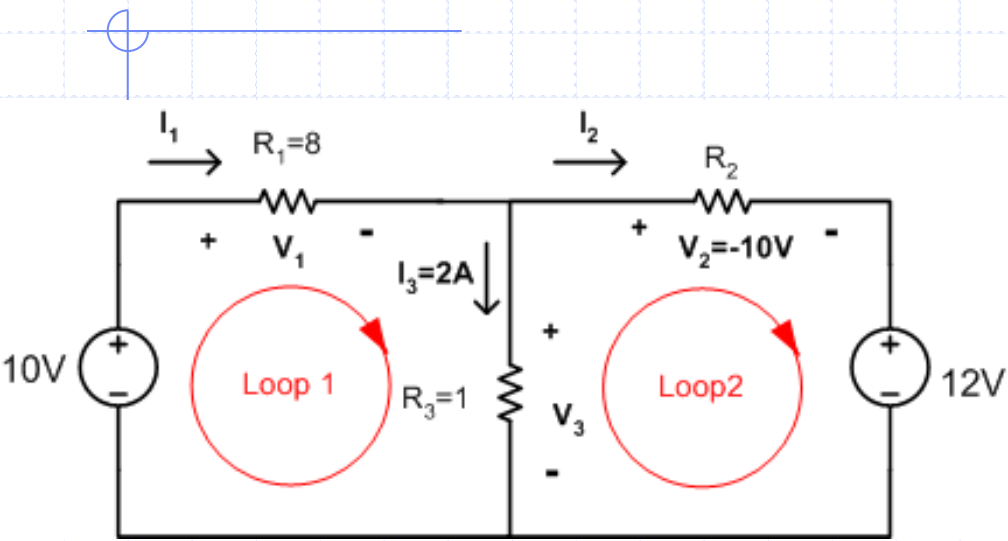
คำนวณหาค่า V_2

KVL:

$$-v_3 + v_2 + 12 = 0$$

$$-2 + v_2 + 12 = 0$$

$$v_2 = -10V$$



คำนวณหาค่ากระแส i_1

$$i_3 = 2A$$

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{8V}{8} = 1A$$

คำนวณหาค่ากระแส i_2

KCL:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$i_2 = i_1 - i_3$$

$$i_2 = 1 - 2 = -1A$$

คำนวณหาค่ากระแส R_2

$$R_2 = \frac{v_2}{i_2} = \frac{-10}{-1} = 10\Omega$$

ตัวอย่างที่ 3.3 จากวงจรจงคำนวณหาค่า i_1 และ แรงดันคร่อม แหล่งจ่าย v_1

วิธีทำ

หาค่า i_1

KCL: $-i_1 - i_2 + 5A = 0$

แต่ $i_2 = \frac{12}{6} = 2A$

แทนค่า i_2 : $-i_1 - 2 + 5A = 0$

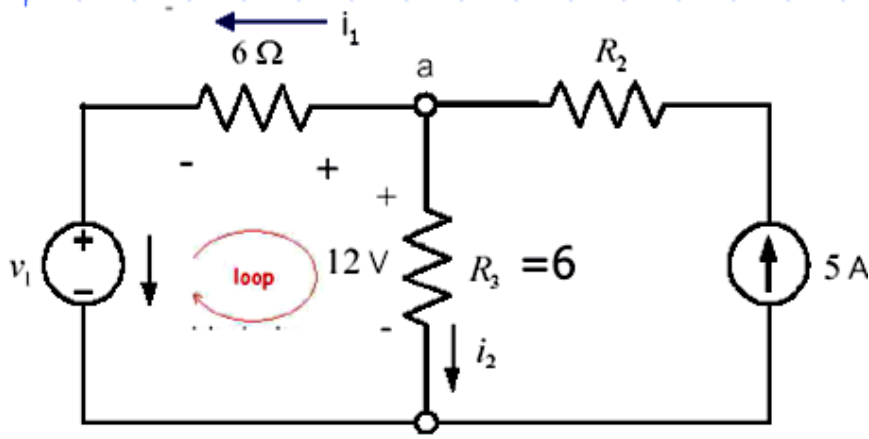
ดังนั้น $i_1 = 3A$

หาค่า v_1

KCL: $-v_1 - v_{6\Omega} + 12V = 0$

$-v_1 - (3A \times 6\Omega) + 12V = 0$

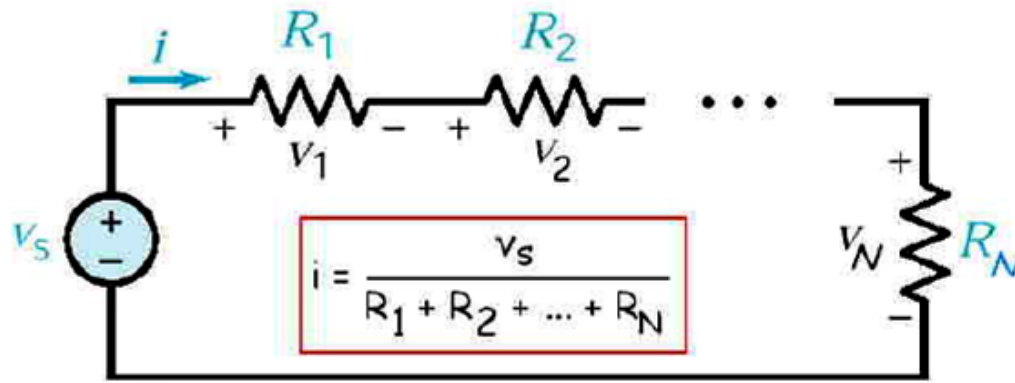
$v_1 = -6V$



3.2 การหาความต้านทานรวม

การนำอุปกรณ์ไฟฟ้าชนิดตัวต้านทานมาต่อเป็นวงจร การคำนวณหาความต้านทานรวมจะมีสองแบบ คือ กรณีที่ตัวต้านทานต่ออนุกรม และกรณีที่ต่อขนานกัน

3.2.1 กรณีที่ตัวต้านทานต่ออนุกรม



สูตร

$$R_{\text{รวม}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N$$

พิสูจน์ จาก KVL: $-v_S + v_1 + v_2 + v_3 \dots + v_N = 0$

$$v_1 + v_2 + v_3 \dots + v_N = v_S$$

$$iR_1 + iR_2 + iR_3 \dots + iR_N = v_S$$

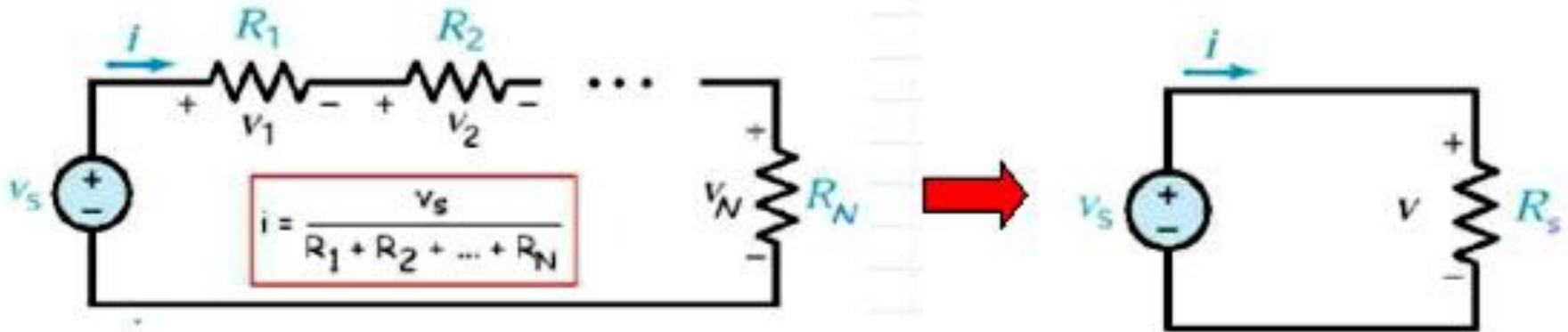
$$i(R_1 + R_2 + R_3 \dots + R_N) = v_S$$

ให้

$$R_{รวม} = R_1 + R_2 + R_3 \dots + R_N$$

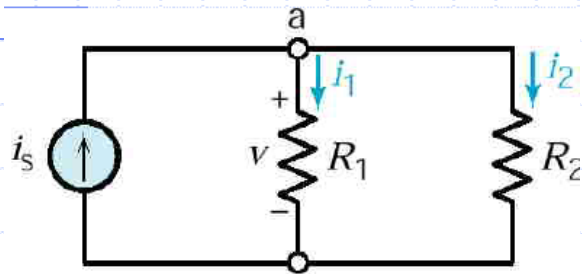
$$i(R_{รวม}) = v_S$$

$$R_{รวม} = \frac{v_S}{i}$$



3.2.2 กรณีที่ตัวต้านทานต่อขนาน

กรณีที่ตัวต้านทานต่อขนานสองตัว



สูตร

$$R_{รวม} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

พิสูจน์

จาก KCL : $-i_s + i_1 + i_2 = 0$

$$i_1 + i_2 = i_s$$

$$\frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = i_s$$

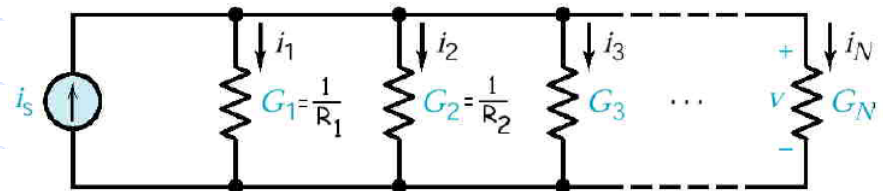
$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v = i_s$$

$$\frac{v}{i_s} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

ให้ $R_{รวม} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

$$R_{รวม} = \frac{v}{i}$$

กรณีที่ตัวต้านทานต่อขนานมากกว่าสองตัว



สูตร

$$\frac{1}{R_{รวม}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

พิสูจน์

จาก KCL : $-i_s + i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N = 0$

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N = i_s$$

$$\frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} + \dots + \frac{v}{R_N} = i_s$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}\right)v = i_s$$

$$\frac{v}{i_s} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}\right)$$

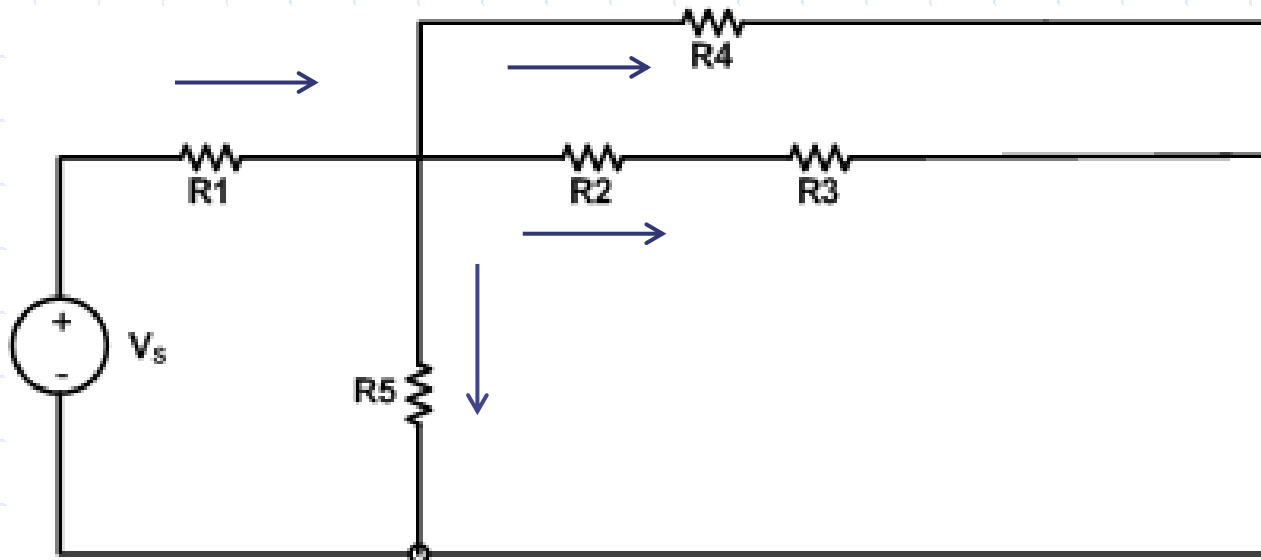
ให้ $R_{รวม} = R_1 // R_2 // R_3 \dots // R_N$

$$\frac{1}{R_{รวม}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

หรือ

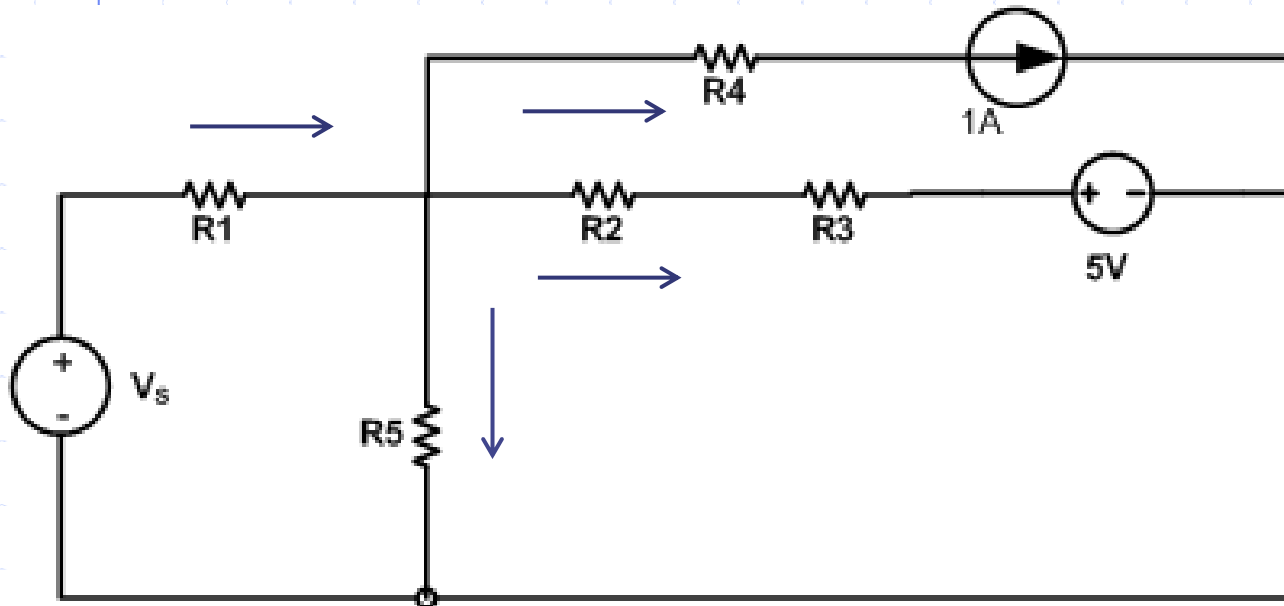
$$G_{รวม} = G_1 + G_2 + G_3 \dots + G_N$$

การพิจารณาการต่อแบบอนุกรมหรือแบบขนาน



การต่อแบบอนุกรมต้องมีเงื่อนไขดังนี้ :

1.
2.



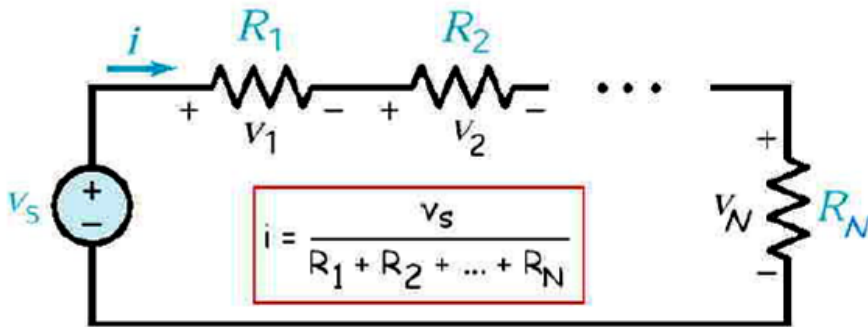
การต่อแบบขนานต้องมีเงื่อนไขดังนี้ :

1.
2.

3.3 การแบ่งแรงดัน(Voltage Divider) และ การแบ่งกระแส(Current Divider)

3.3.1 การแบ่งแรงดัน(Voltage Divider)

ค่าแรงดันตกคร่อมตัวต้านทานตัวใดตัวหนึ่งที่ต่ออนุกรมอยู่ในวงจร คือ สัดส่วนของค่าความต้านทานของมันเองต่อความต้านทานรวม คูณด้วยค่าแรงดันของแหล่งจ่าย วงจรนี้แสดงถึงหลักการของการแบ่งแรงดันเป็นส่วนๆ เรียกทั่วไปว่า วงจรแบ่งแรงดัน (Voltage Divider)



พิสูจน์ จาก KVL : $v_1 = iR_1$

$$v_s = i(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N)$$

สัดส่วนแรงดัน v_1 และ v_s

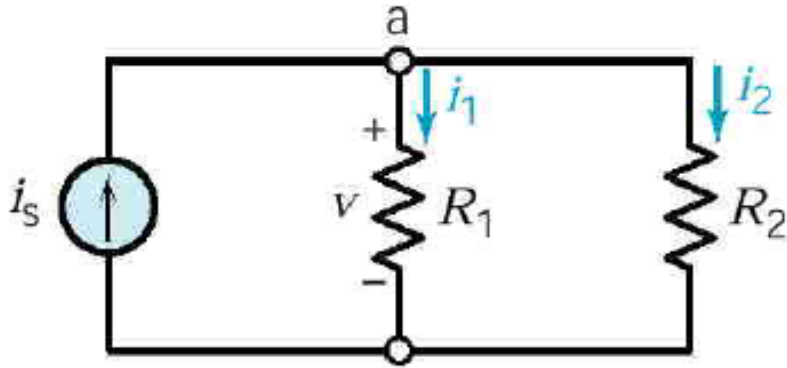
$$\frac{v_1}{v_s} = \frac{iR_1}{i(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N)}$$

$$v_1 = \frac{R_1}{(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N)} \times v_s$$

สูตร

$$V_{\text{คร่อมRใด}} = \frac{R_{\text{ตัวนั้น}}}{\text{ผลบวกของRทั้งหมด}} \times V_{\text{Supply}}$$

3.3.2 การแบ่งกระแส(Current Divider)



พิสูจน์ จาก KCL : $v = i_1 R_1$

$$v = i_s (R_1 // R_2)$$

สัดส่วนกระแส i_1 และ i_s

$$\frac{i_1}{i_s} = \frac{R_1 // R_2}{R_1}$$

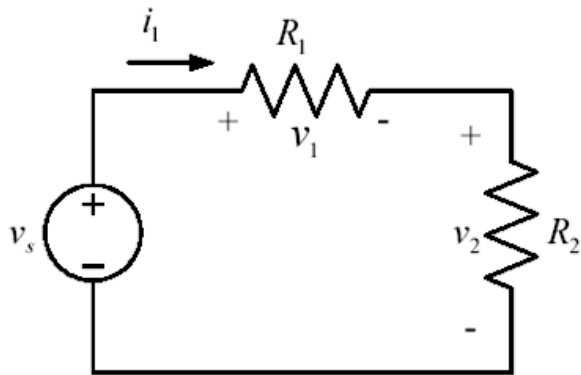
$$i_1 = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \times i_s$$

$$I_{\text{ไหลผ่าน } R \text{ ใด}} = \frac{R_{\text{อีกตัว}}}{\text{ผลบวกของ } R \text{ ทั้งหมด}} \times I_{\text{supply}}$$

ใช้ได้เฉพาะ R 2 ตัวต่อขนานเท่านั้น

หมายเหตุ : วิธีการนี้ใช้ได้เฉพาะตัวต้านทานสองตัวที่ขนานกันเท่านั้น ถ้าตัวต้านทานที่มากกว่าสองตัวจะต้องทำการยุบให้เหลือสองตัวเท่านั้นจึงสามารถใช้วิธีการนี้ได้

ตัวอย่างที่ 3.4 พิจารณาวงจรในรูป จงหาค่าความต้านทาน R_2 ที่จะให้ค่าแรงดันตกคร่อมตัวมันมีค่า หนึ่งส่วนสี่ของแรงดันจากแหล่งจ่าย V_S กำหนดค่า $R_1 = 9 \text{ Ohms}$ และถ้า กำหนดให้ค่า $V_S = 12V$ จงหาค่ากระแสที่ไหลในวงจร



วิธีทำ แรงดันคร่อมตัวต้านทาน R_2 คือ

Voltage Divider :
$$v_2 = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \times v_s$$

เนื่องจากเราต้องการค่า
$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{R_2}{(R_1 + R_2)} = \frac{1}{4}$$

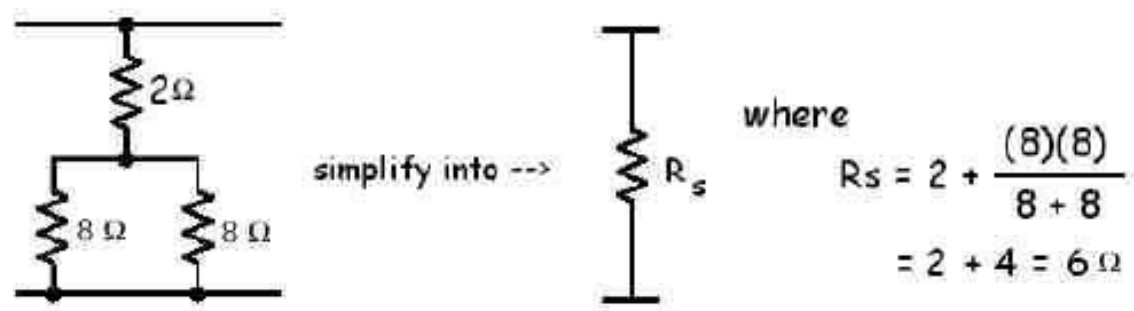
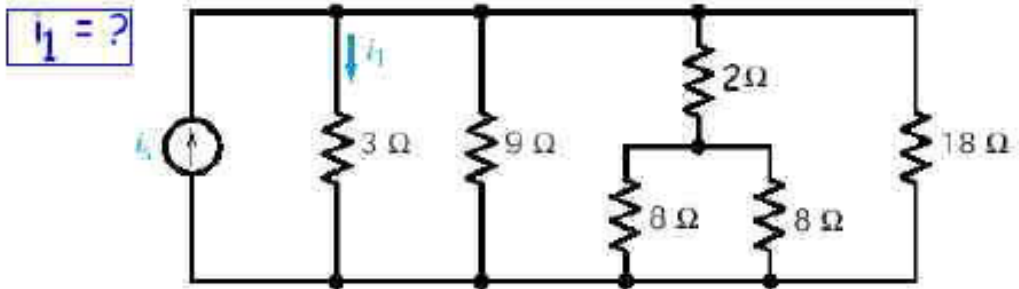
$$R_1 = 3R_2$$

จากโจทย์กำหนดให้ $R_1 = 9 \Omega$ จะได้ $R_2 = 3 \Omega$

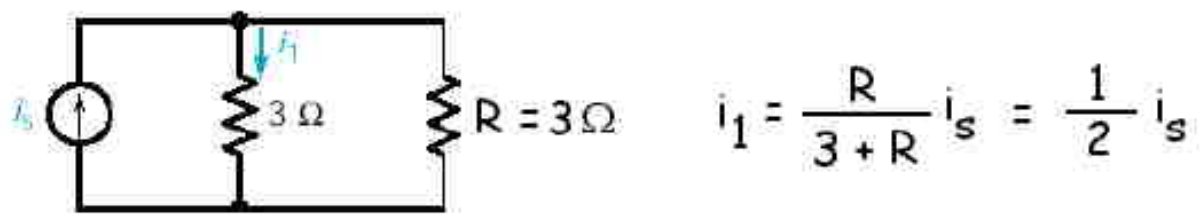
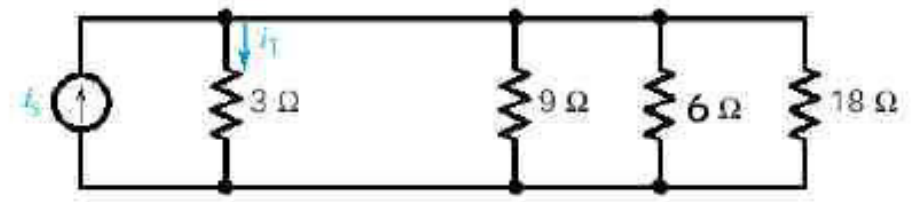
การคำนวณหาค่ากระแสในวงจร

$$i = \frac{v_s}{(R_1 + R_2)} = \frac{12V}{12\Omega} = 1A$$

ตัวอย่างที่ 3.5 พิจารณาวงจรในรูป จงหากระแส i_1

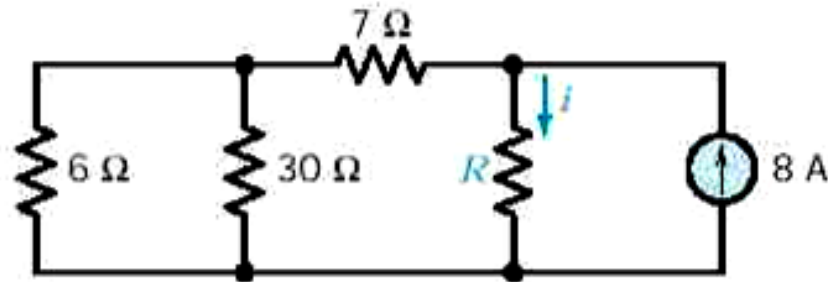


Circuit reduces the following equivalent circuit:

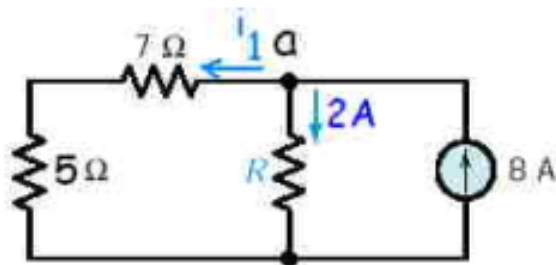


Ans

ตัวอย่างที่ 3.6 จากวงจรจงคำนวณหาค่า R และ Power ที่ load $6\ \Omega$ เมื่อกระแส $i = 2\text{ A}$



วิธีทำ ทำการดัดแปลงวงจรยุบตัวต้านทาน $6\ \Omega // 30\ \Omega = 5\ \Omega$



จาก KCL ที่ node a : $i_1 = 8 - 2 = 6\text{ A}$

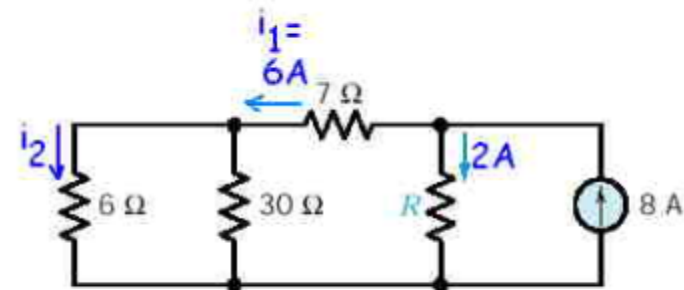
ใช้หลักการ Current Divider หาค่ากระแส

$$i = \frac{(7+5)}{(7+5)+R} \times 8\text{ A}$$

$$2\text{ A} = \frac{12}{12+R} \times 8\text{ A}$$

ตอบ $R = 36\ \Omega$

หาค่า Power ที่ $6\ \Omega$



ใช้หลักการ Current Divider หาค่ากระแส i_2

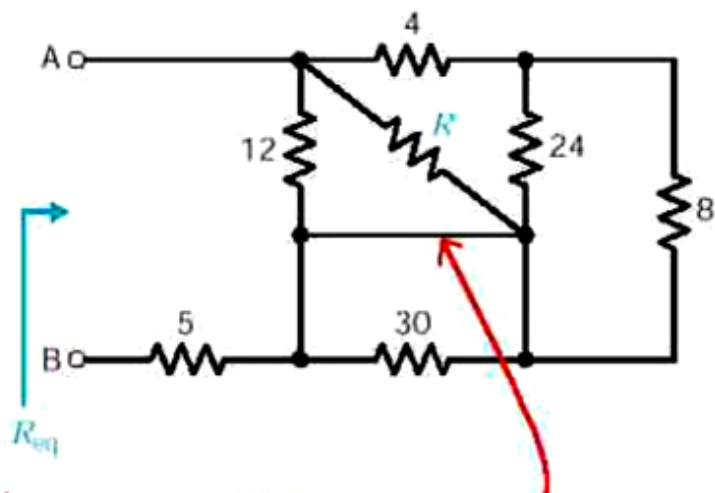
$$i_2 = \frac{30}{30+6} \times 6\text{ A}$$

$$i_2 = 5\text{ A}$$

$$P_{6\Omega} = i_2^2 \cdot 6\Omega = (5\text{ A})^2 \cdot 6\Omega = 150\text{ W}$$

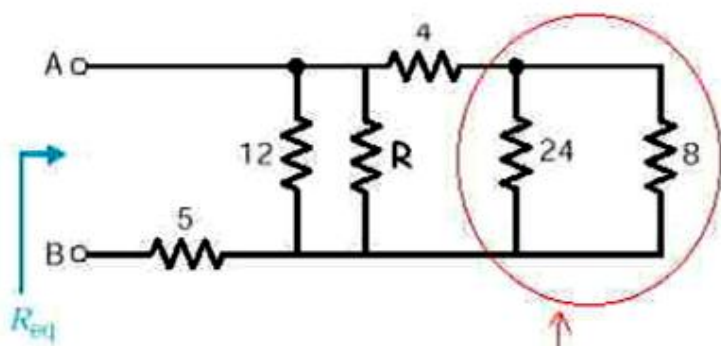
ตอบ $P_{6\Omega} = 150\text{ W}$

ตัวอย่างที่ 3.7 จากวงจรจงคำนวณหาค่า R เมื่อ $R_{eq} = 9 \text{ Ohms}$



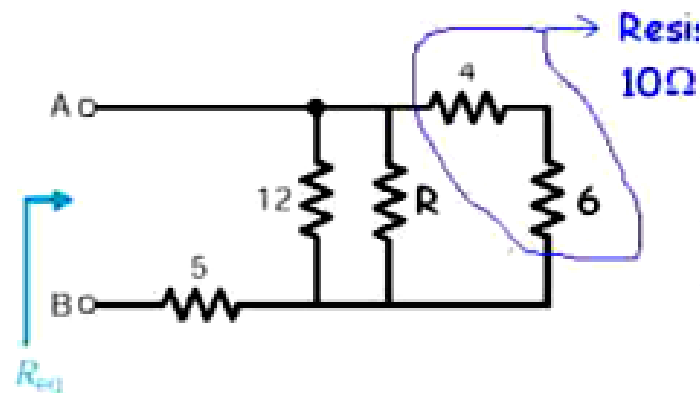
short cct ทำให้ตัดทิ้ง ค.ต.ท 30 Ω

ทำการเขียนวงจรใหม่ให้ดูง่ายขึ้น



Parallel resistors

ทำการยุบวงจรใหม่ให้ดูง่ายขึ้น



คำนวณหาค่า R

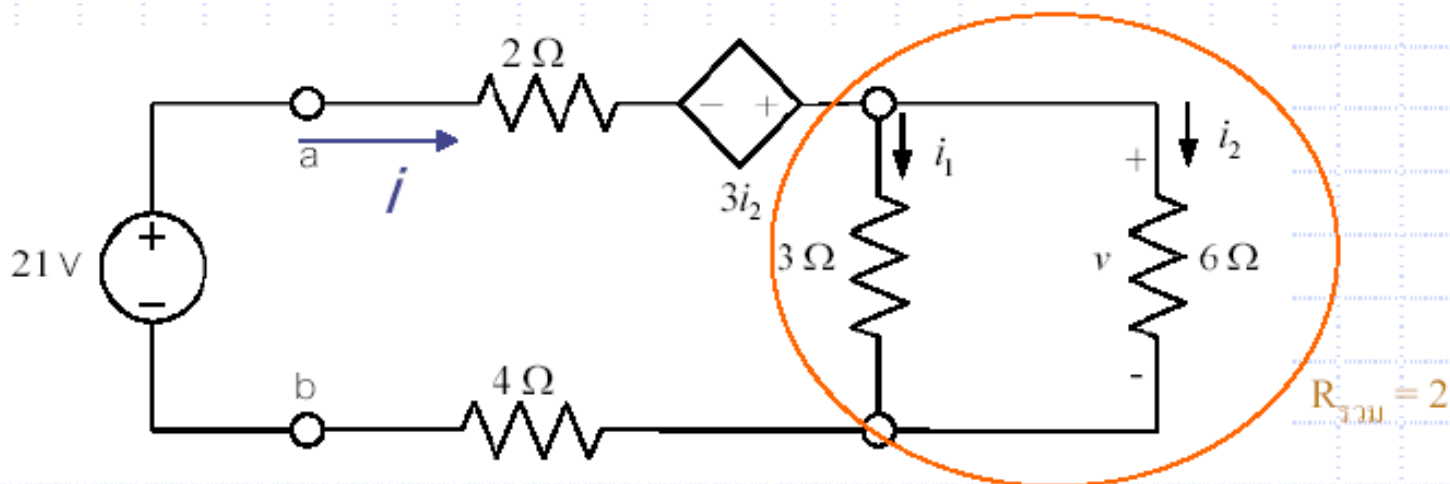
$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{R} + \frac{1}{10}} + 5 = 9 \text{ } \Omega$$

ตอบ

$$R = 15 \text{ } \Omega$$

ตัวอย่างที่ 3.8

จงคำนวณหาค่ากระแส i_2 และแรงดัน v



วิธีทำ

Current divider:

$$i_2 = \frac{3}{3+6} \times i = \frac{1}{3} \times i$$

$$i = 3i_2$$

KVL: $-21 + 2i - 3i_2 + 6i_2 + 4i = 0$

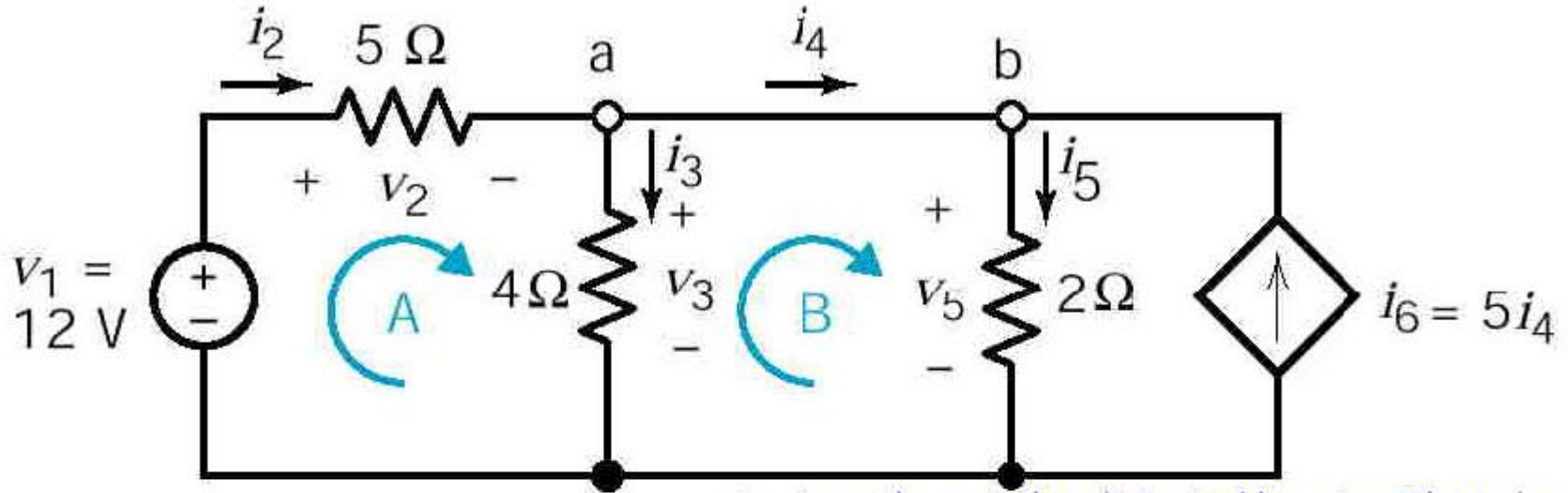
$$-21 + 2(3i_2) - 3i_2 + 6i_2 + 4(3i_2) = 0$$

$$-21 + 6i_2 - 3i_2 + 6i_2 + 12i_2 = 0$$

$$-21 + 21i_2 = 0$$

$$i_2 = 1A \quad \text{and} \quad v = 6V \quad \underline{\underline{Ans}}$$

ตัวอย่างที่ 3.9 จากวงจรจงคำนวณหาค่า V_2 , i_3 , i_4 และ V_5



สมการ

$$\text{KVL (A): } -12 + v_2 + 4i_3 = 0$$

$$\text{KVL (B): } -v_3 + v_5 = 0$$

$$\text{KCL (a): } i_2 - i_3 - i_4 = 0$$

$$\text{KCL (b): } i_4 - i_5 + 5i_4 = 0$$

i_2 , i_5 , and v_3 can be eliminated by using Ohm's law:

$$i_2 = \frac{v_2}{5}, \quad i_5 = \frac{v_5}{2}, \quad \text{and } v_3 = 4i_3$$

$$\begin{aligned} v_2 + 4i_3 &= 12 \\ v_5 &= 4i_3 \\ \frac{v_2}{5} &= i_4 + i_3 \\ \frac{v_5}{2} &= 6i_4 \end{aligned}$$

Solving by substitution we get:

$$v_2 = 7.5 \text{ V} \quad i_3 = 1.125 \text{ A}$$

$$i_4 = 0.375 \text{ A} \quad v_5 = 4.5 \text{ V}$$

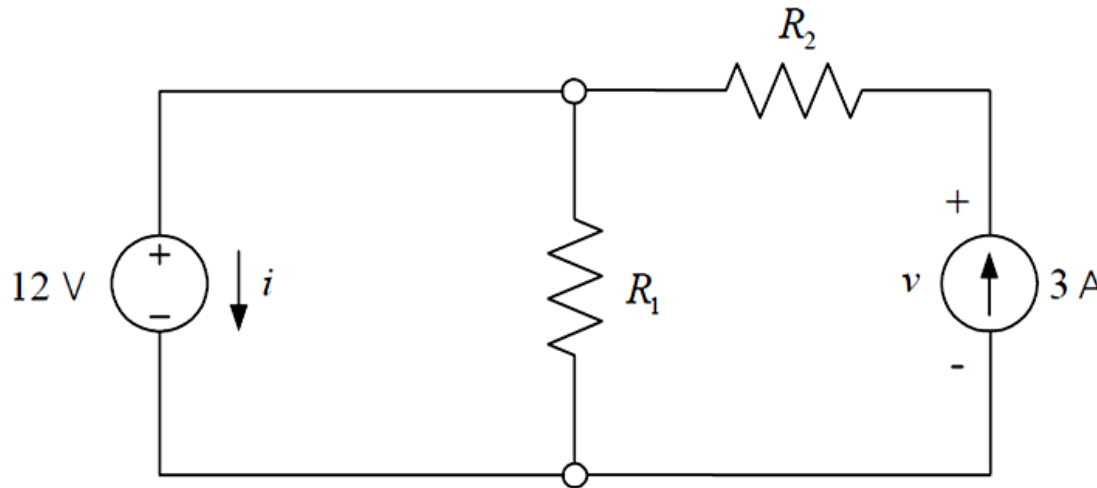
Mathcad: math3-1
Workbench: circ3-6

เปลี่ยนค่าอยู่ในรูปที่ต้องการ

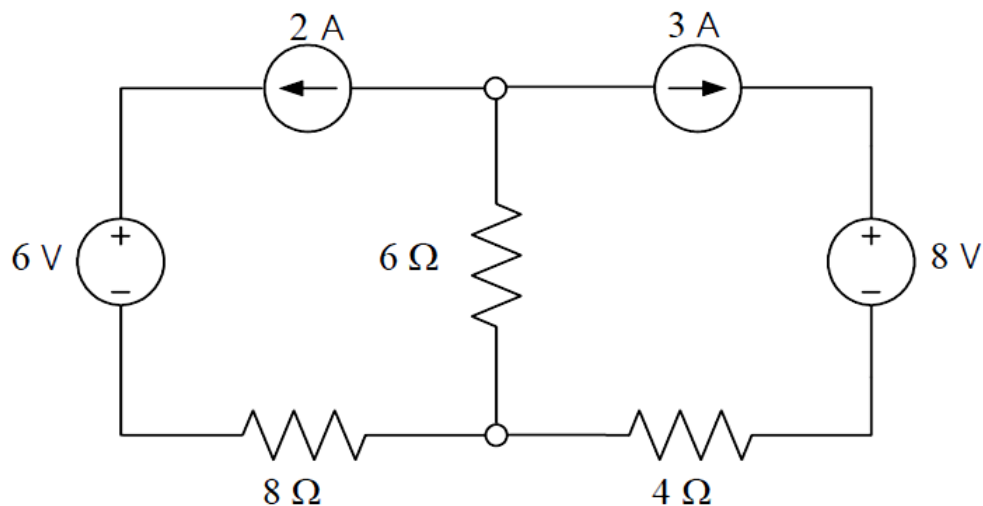
แบบฝึกหัด

1. จากวงจรในรูปข้างล่าง

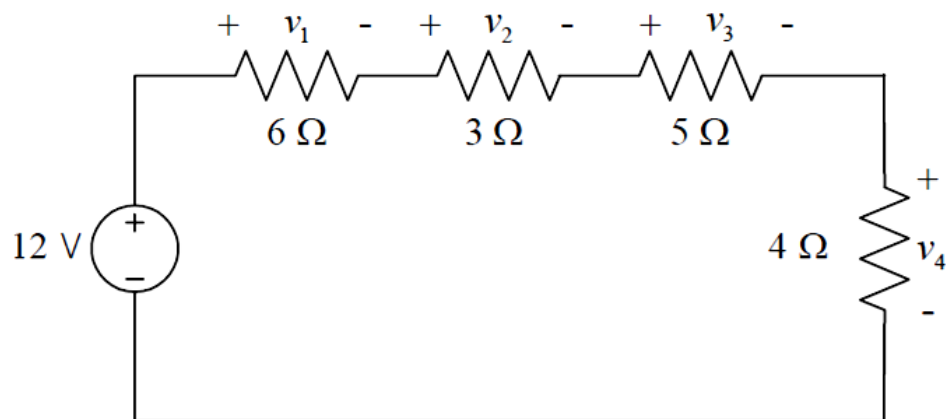
- (ก) กำหนด $R_1 = 6\Omega$ และ $R_2 = 3\Omega$ จงหาค่ากระแส i และแรงดัน v
- (ข) กำหนด $i = 1.5\text{ A}$ และ $v = 2\text{ V}$ จงหาค่าความต้านทาน R_1 และ R_2
- (ค) ถ้าแหล่งจ่ายแรงดันจ่ายกำลัง 24 W และแหล่งจ่ายกระแสจ่ายกำลัง 9 W จงหาค่ากระแส i และแรงดัน v และหาค่าความต้านทาน R_1 และ R_2



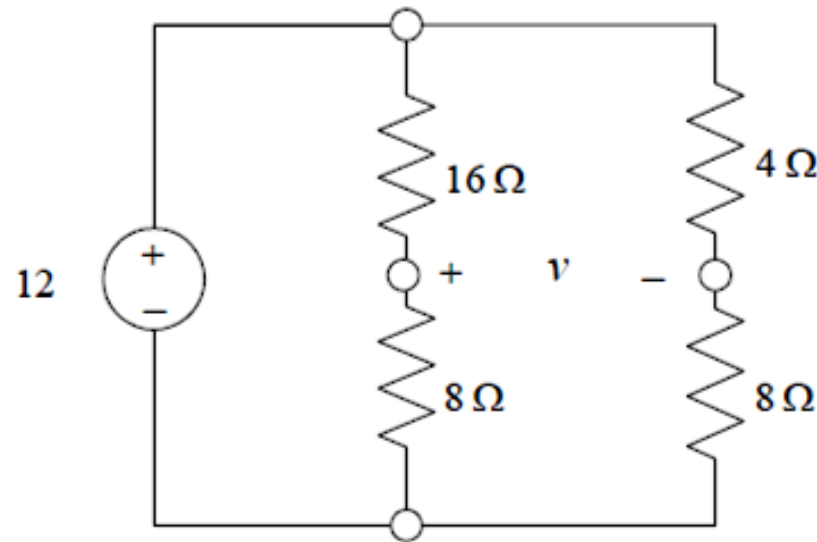
2. จากวงจรในรูป จงหาค่ากำลังที่ตัวต้านทานแต่ละตัวได้รับ



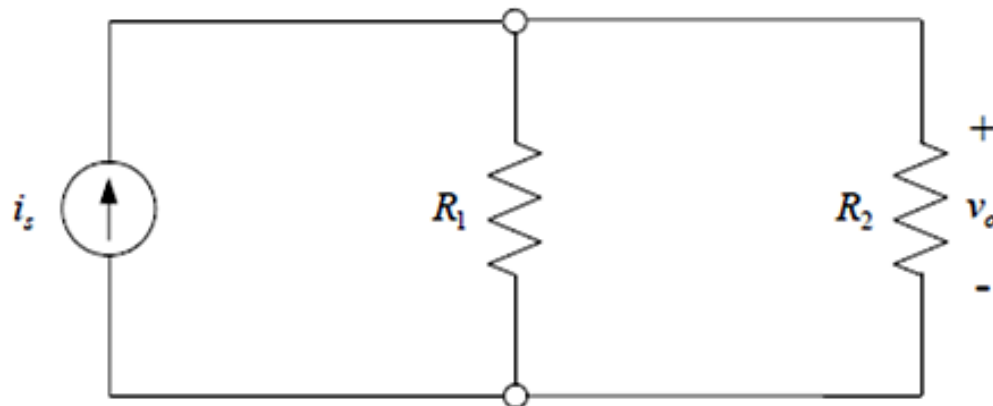
3. จงใช้หลักการแบ่งแรงดันหาค่าแรงดัน v_1 v_2 v_3 และ v_4 ในวงจรในรูปข้างล่าง



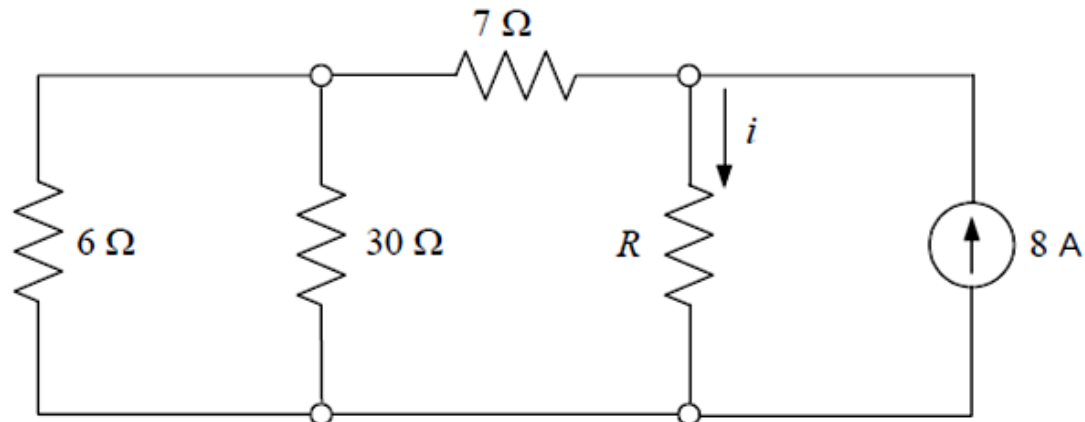
4. จงหาค่าแรงดัน v ของวงจรในรูป



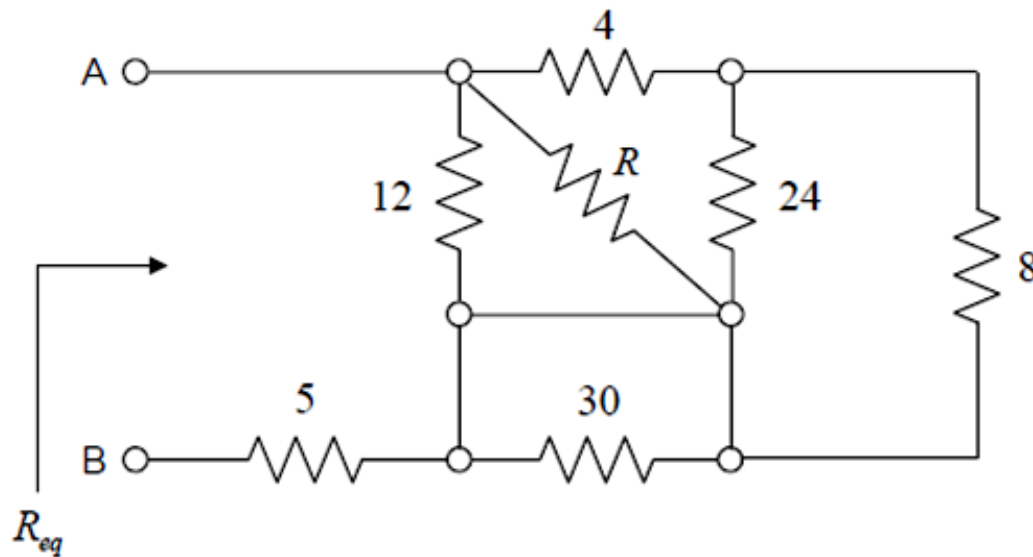
5. พิจารณาในรูป ถ้า $4\Omega \leq R_1 \leq 10\Omega$ และ $R_2 = 10\Omega$ จงเลือกค่าแหล่งจ่ายกระแส i_2 เพื่อให้แรงดัน v_0 มีค่าอยู่ระหว่าง 9 ถึง 13V



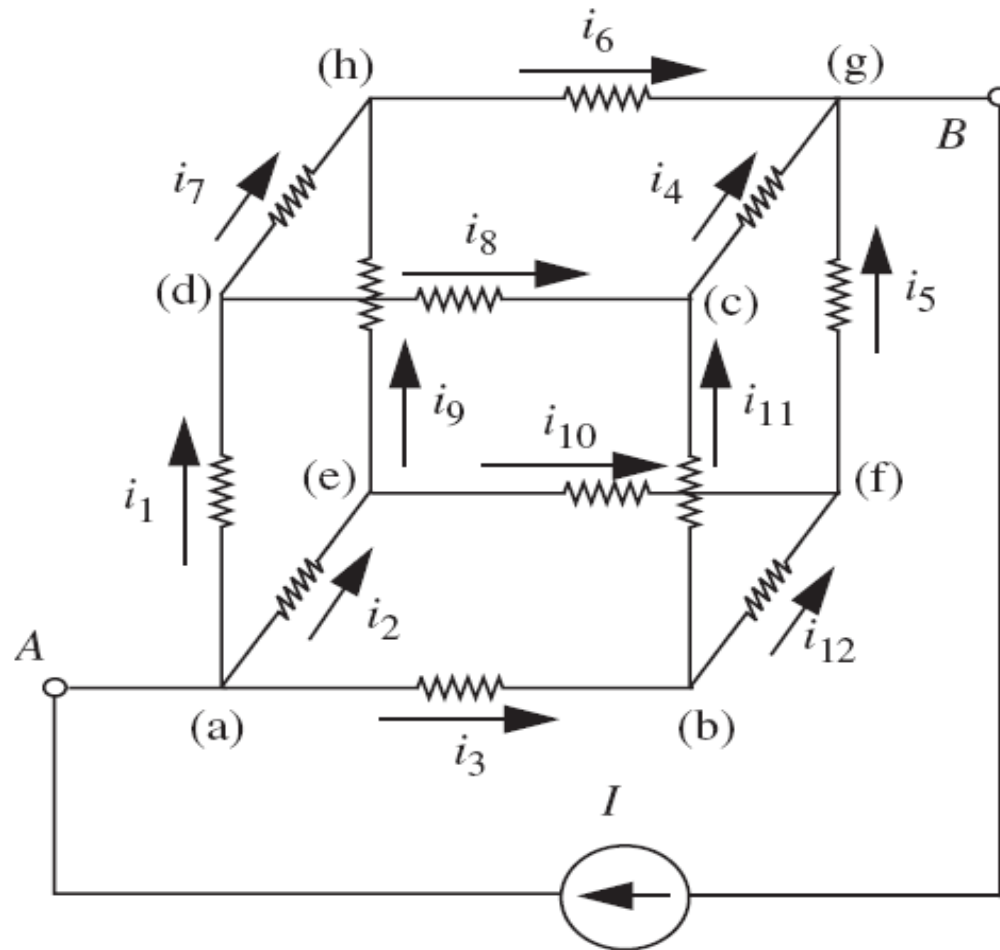
6. จากวงจรในรูปข้างล่าง จงหาค่าความต้านทาน R และค่ากำลังที่จ่ายให้กับตัวต้านทาน 6Ω เมื่อกระแสมีค่า $i=2A$



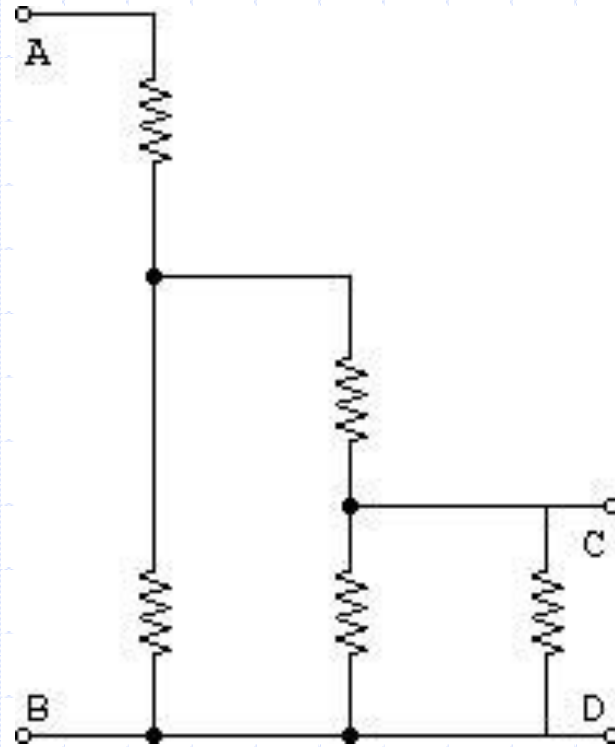
7. จากวงจรในรูปข้างล่าง จงหาค่าความต้านทาน R เมื่อกำหนด $R_{eq} = 9 \Omega$



8. จงหาค่า R_{AB} เมื่อ ตัวต้านทานทุกตัวมีขนาดเท่ากันคือ R (ตอบ $5R/6$)



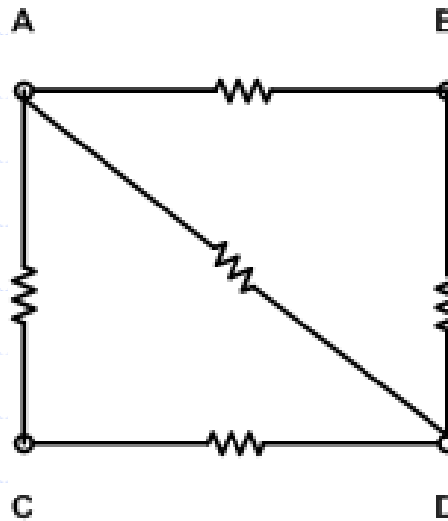
9. ให้ตัวต้านทานทุกตัวในวงจรมีค่าเท่ากับ 2 โอห์ม ความต้านทานรวมเมื่อวัด ณ จุด A - B และ ณ จุด C - D ของวงจรนี้มีค่า เป็นเท่าใด



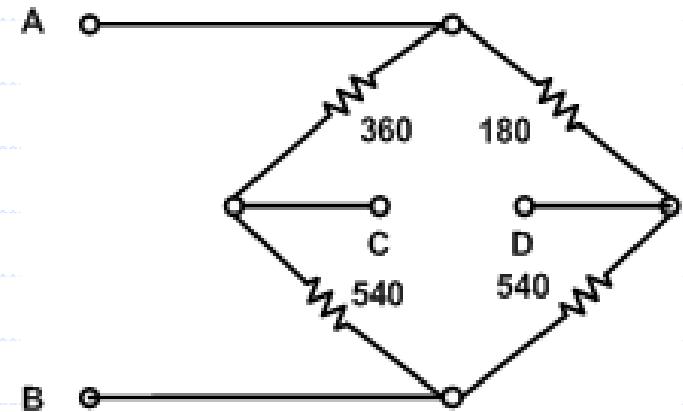
10. ให้ตัวต้านทานทุกตัวในวงจรมีค่าเท่ากับ 2 โอห์ม เมื่อจ่ายแรงดันขนาด 16 V ให้วงจร ณ จุด A - B แล้ว ความต่างศักย์ ณ จุด C - D มีค่าเป็นเท่าใด

11. ให้ตัวต้านทานทุกตัวในวงจรมีค่าเท่ากับ 2 โอห์ม เมื่อจ่ายแรงดันขนาด 16 V ให้วงจร ณ จุด C - D แล้ว ความต่างศักย์ ณ จุด A - B มีค่าเป็นเท่าใด

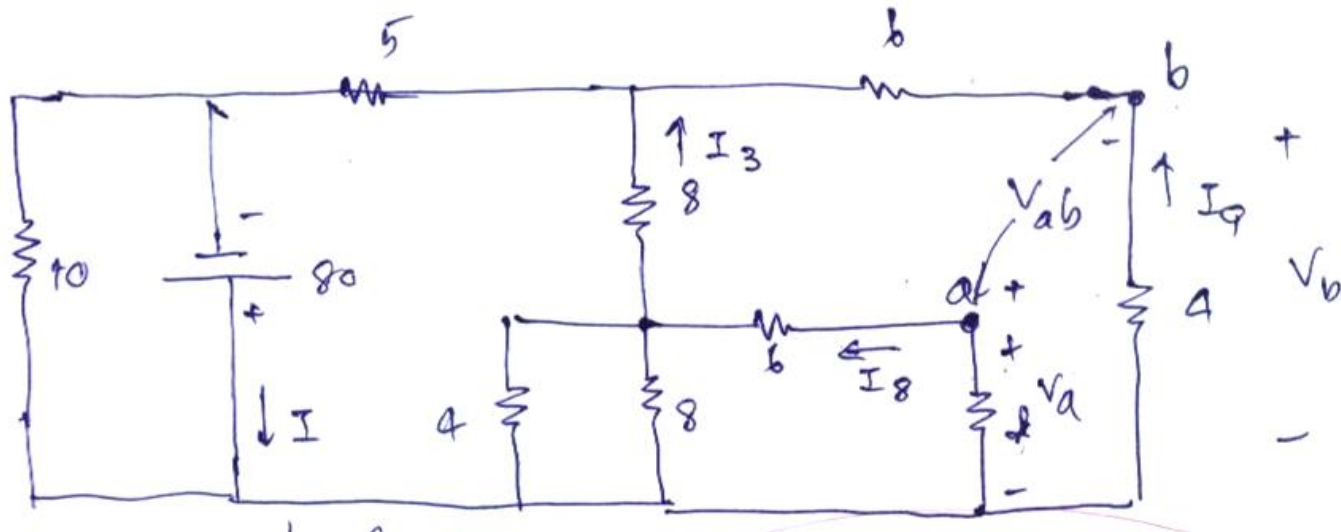
12. ให้ตัวต้านทานทุกตัวในวงจรมีค่าเท่ากับ 1 โอห์ม ความต้านทานรวมเมื่อวัด ณ จุด A - B และณ จุด B -D ของวงจรนี้มีค่า เป็นเท่าใด



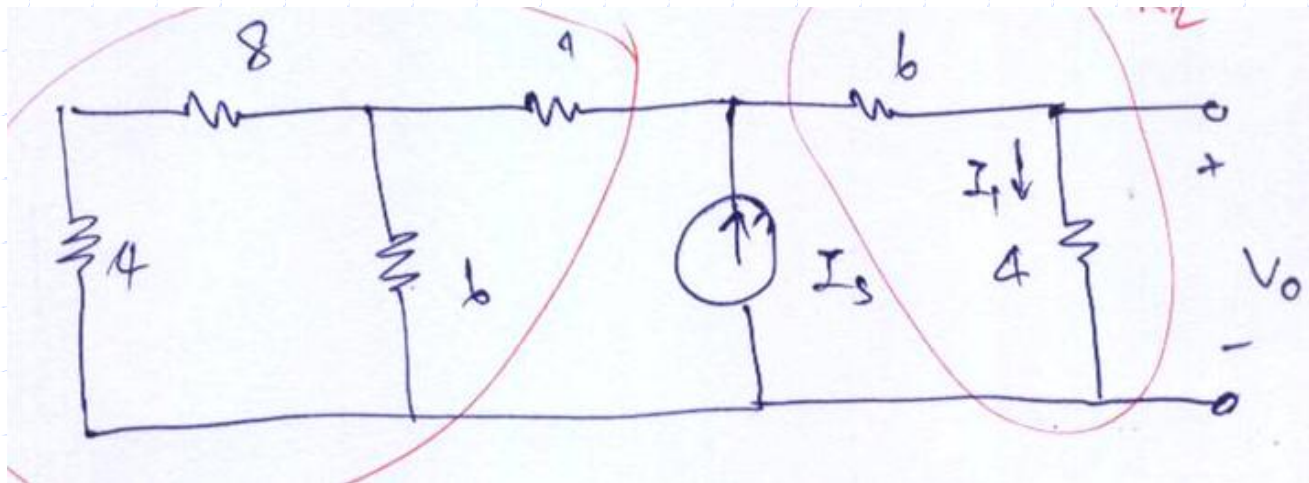
13. ก) ความต้านทานที่จุด A - B ขณะที่ C -D เปิดวงจร
 ข) ความต้านทานที่จุด A - B ขณะที่ C -D ลัดวงจร
 ค) ความต้านทานที่จุด C - D ขณะที่ A -B เปิดวงจร
 ง) ความต้านทานที่จุด C - D ขณะที่ A -B ลัดวงจร



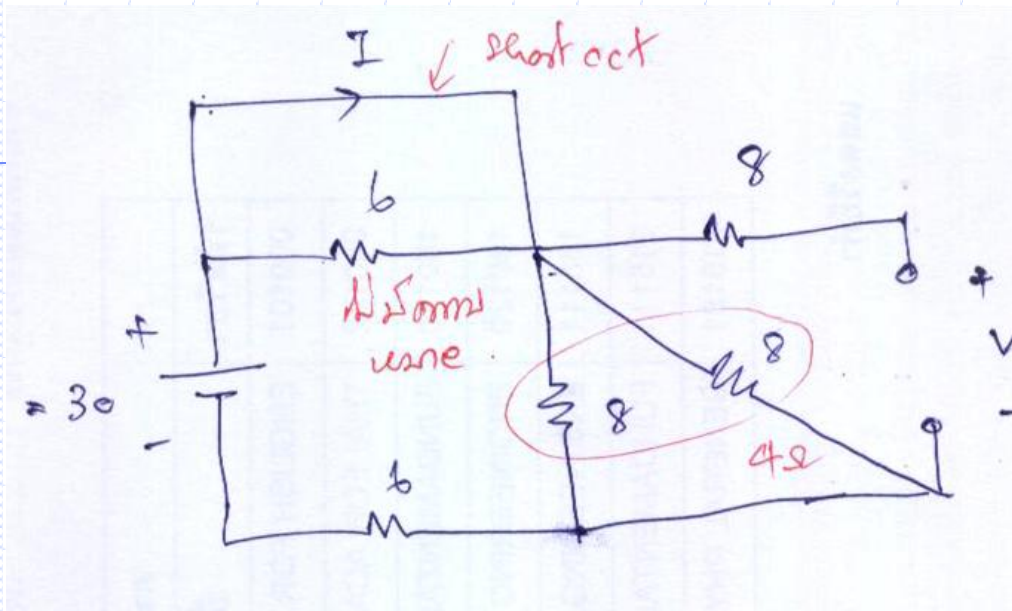
14. จากวงจรจงคำนวณหาค่า I , I_3 , I_8 , I_9 และ V_{AB}



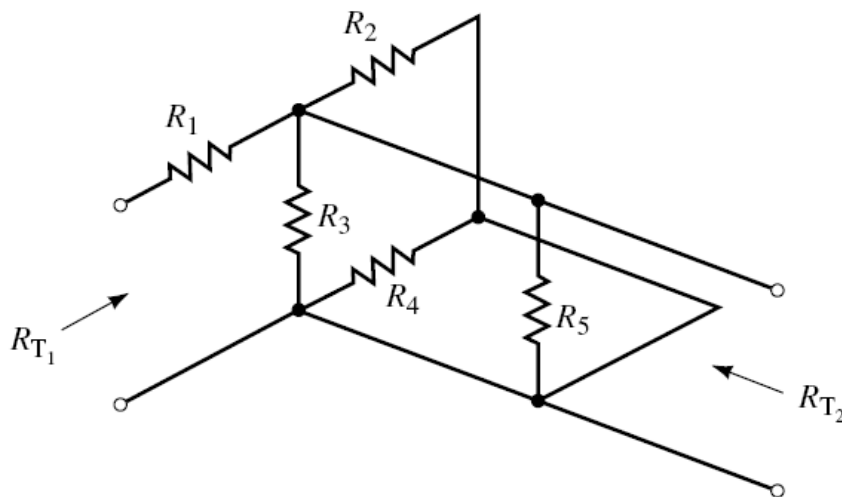
15. จากวงจรจงคำนวณหาค่า I_5 เมื่อ $V_0 = 12V$



16. จากวงจรจงคำนวณหาค่า I และ V

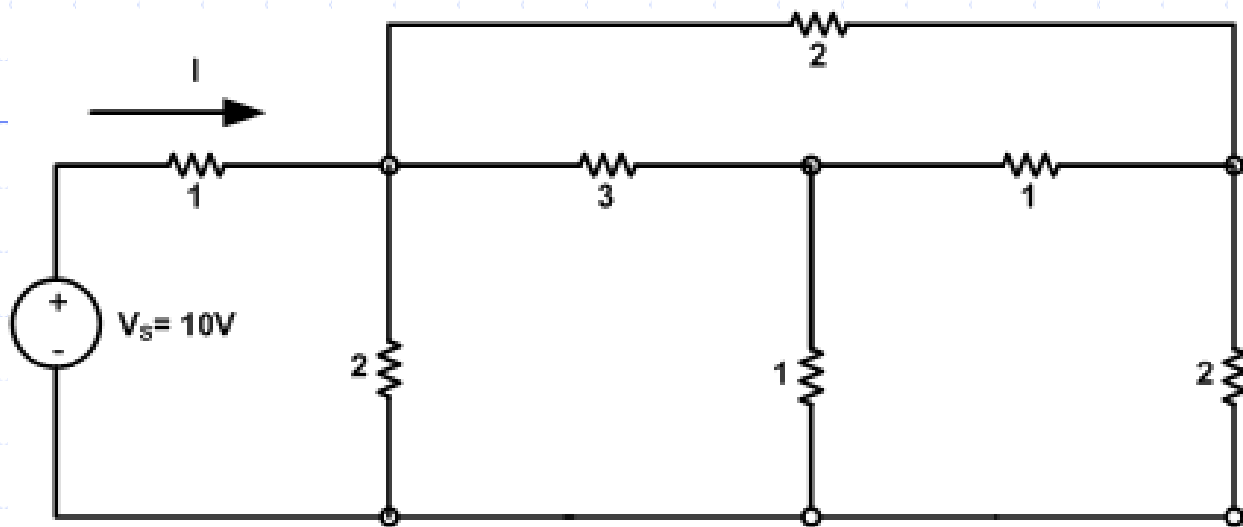


17. จากวงจรจงหา R_{T1} R_{T2} , เมื่อ $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1$

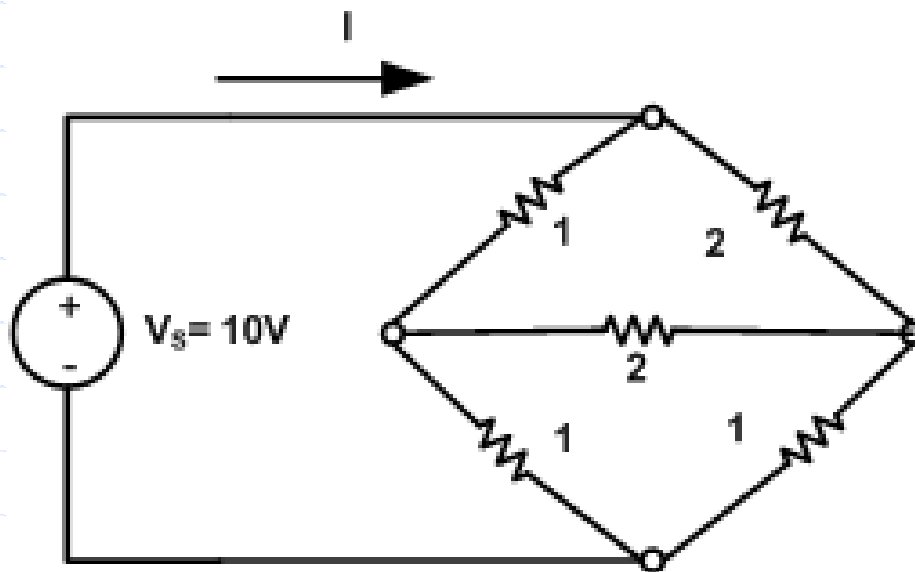


18. จากวงจรจงหา I

วงจรที่ 1.



วงจรที่ 2.



18. จากวงจรจงหา I

วงจรที่ 3.

