บทที่ 5

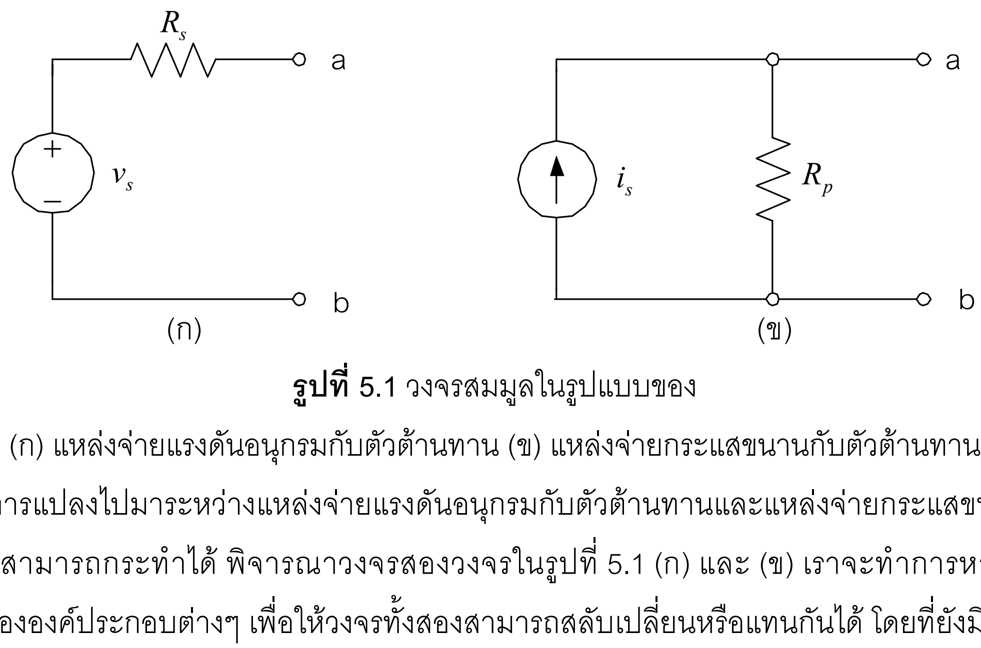
กฎและทฤษฎีบทวงจร

Circuit Laws and Theorems

ในบทที่แล้วเราได้ศึกษาวิธีการวิเคราะห์วงจรสองวิธีหลักมาแล้ว ในบทนี้จะกล่าวถึงกฎและทฤษฎีบทต่างๆ ที่ใช้ช่วยในการทำให้วงจรที่ซับซ้อนลดรูปเป็นวงจรที่ง่ายขึ้นส่งผลทำให้การวิเคราะห์วงจรทำได้ง่ายขึ้นด้วย โดยจะเริ่มด้วยวิธีการแปลงแหล่งจ่ายแรงดันเป็นแหล่งจ่ายกระแสและแหล่งจ่ายกระแสเป็นแหล่งจ่ายแรงดัน จากนั้นจะกล่าวถึงทฤษฎีที่เป็นหัวใจของวงจรและอุปกรณ์เชิงเส้นนั่นคือ ทฤษฎีซุปเปอร์โพสิชัน ทฤษฎีวงจรสมมูลของเทวินินและนอร์ตันจะทำให้เราสามารถพิจารณาพฤติกรรมของวงจรที่ขั้วคู่ใดคู่หนึ่งได้อย่างสะดวก และสุดท้ายคือแนวทางในการนำส่งกำลังสูงสุดไปยังตัวต้านทานโหลด

5.1 การแปลงแหล่งจ่าย

ในบทที่แล้วพบว่าในการใช้การวิเคราะห์เมชนั้นจะทำได้ง่ายหากแหล่งจ่ายทั้งหมดคือแหล่งจ่ายแรงดัน ในทำนองเดียวกันสำหรับการวิเคราะห์แบบโนด จะทำได้ง่ายหากแหล่งจ่ายทั้งหมดเป็นแหล่งจ่ายกระแส ถ้าในวงจรมีแหล่งจ่ายทั้งสองแบบ เราสามารถใช้ทฤษฎีในหัวข้อนี้ทำการแปลงแหล่งจ่ายให้เป็นอย่างใดอย่างหนึ่งได้



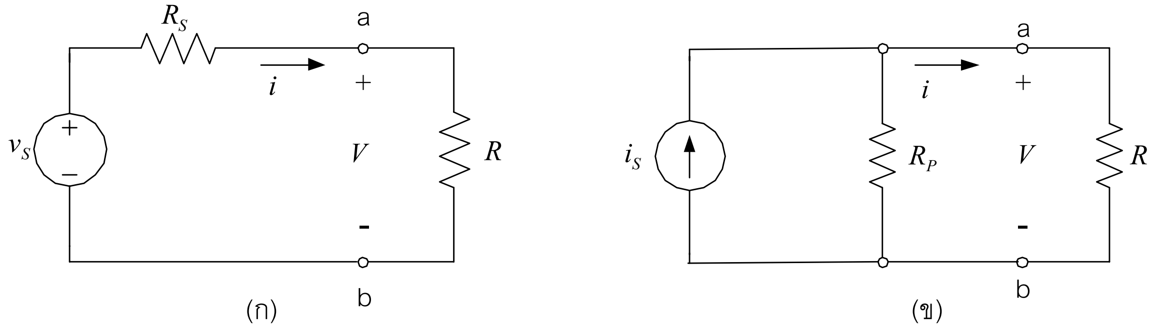
รูปที่ 5.1 วงจรสมมูลในรูปแบบของ

(ก) แหล่งจ่ายแรงดันอนุกรมกับตัวต้านทาน (ข) แหล่งจ่ายกระแสขนานกับตัวต้านทาน

การแปลงไปมาระหว่างแหล่งจ่ายแรงดันอนุกรมกับตัวต้านทานและแหล่งจ่ายกระแสขนานกับตัวต้านทานสามารถกระทำได้ พิจารณาวงจรสองวงจรในรูปที่ 5.1 (ก) และ (ข) เราจะทำการหาค่าความสัมพันธ์ขององค์ประกอบต่างๆ เพื่อให้วงจรทั้งสองสามารถสลับเปลี่ยนหรือแทนกันได้ โดยที่ยังมีหรือให้ผลตอบสนองที่ขั้ว a - b เหมือนเดิม กระบวนการนี้เรียกว่าการแปลงแหล่งจ่าย (Source Transformation) ซึ่งอาศัยพื้นฐานของความสมมูลกัน วงจรสมมูล (Equivalent circuit) หมายถึงวงจรที่มีคุณลักษณะที่ขั้ว

(Terminal Characteristic) เหมือนวงจรเริ่มต้นทุกประการ สังเกตว่าคำว่าสมมูลในที่นี้หมายถึงที่ขั้วของวงจรไม่ใช่ภายในวงจร

เราต้องการแปลงวงจรในรูปที่ 5.1 (ก) ให้เป็นดังรูปที่ 5.1 (ข) ดังนั้นเราจึงต้องการให้วงจรทั้งสองมีคุณลักษณะเหมือนกันสำหรับทุกๆ ค่าความต้านทานภายนอก R ที่นำมาต่อที่ขั้ว a - b ดังในรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 การต่อตัวต้านทานภายนอก R เข้ากับ

(ก) แหล่งจ่ายแรงดันอนุกรมกับตัวต้านทาน (ข) แหล่งจ่ายกระแสขนานกับตัวต้านทาน

ทดลองค่าความต้านทานสองกรณีที่เป็นค่าสูงสุดและต่ำสุดคือ ศูนย์ (ปิดวงจร) และอนันต์ (เปิดวงจร) พบว่าเมื่อความต้านทาน $R = 0$ ขั้ว a - b จะถูกปิดวงจร เราต้องการให้กระแสปิดวงจรของแต่ละวงจรมีค่าเท่ากัน ค่ากระแสปิดวงจรของรูป 5.2 (ก) คือ

$$i_s = \frac{v_s}{R_s} \tag{5.1}$$

ส่วนในวงจรของรูป 5.2 (ข) กระแสปิดวงจรมีค่าเท่ากับ i_s ซึ่งเราต้องการให้เท่ากับ สมการ (5.1) ดังนั้น

$$i_s = \frac{v_s}{R_s} \tag{5.2}$$

ในกรณีเปิดวงจรหรือ $R = \infty$ เราได้จากรูปที่ 5.2 (ก) ว่า $v_{ab} = v_s$ ในรูปที่ 5.2 (ข) แรงดันเปิดวงจร

$$v_{ab} = i_s R_p \tag{5.3}$$

เนื่องจาก v_{ab} ในทั้งสองกรณีจะต้องเท่ากัน ดังนั้น

$$v_s = i_s R_p$$

แต่จากสมการ (5.2) เราต้องการให้ $i_s = \dfrac{v_s}{R_s}$ ทำให้

$$v_s = \left(\frac{v_s}{R_s}\right) R_p$$

ซึ่งจะเป็นจริงได้เมื่อ

$$R_s = R_p \tag{5.4}$$

หากจะทำให้วงจรทั้งสองสมมูลกัน สมการ (5.2) และ (5.4) ต้องเป็นจริงพร้อมกัน

การได้เงื่อนไขข้างต้นมาจากการพิจารณาค่าความต้านทานเพียงสองค่าเท่านั้น ($R = 0$ และ $R = \infty$) พิจารณากรณีค่าความต้านทานใดๆ R จากรูปที่ 5.2 (ก) ใช้ KVL จะได้

$$v_s = iR_s + v$$

หารด้วย R_s ได้

$$\frac{v_s}{R_s} = i + \frac{v}{R_s}$$

ใช้ KCL ที่โนด a ในรูปที่ 5.2 (ข)

$$i_s = i + \frac{v}{R_p}$$

จะเห็นได้ว่าวงจรทั้งสองจะสมมูลเมื่อ $i_s = \frac{v_s}{R_s}$ และ $R_s = R_p$

ดังนั้นเราสามารถสรุปหลักการการแปลงแหล่งจ่ายได้ดังนี้

“แหล่งจ่ายแรงดันใดๆ v_s ซึ่งมีค่าความต้านทานอนุกรม R_s สามารถแทนที่ได้ด้วยแหล่งจ่ายกระแส i_s พร้อมกับความนำขนาน (หรือตัวต้านทานขนาน) G_p (หรือ $R_p = \frac{1}{G_p}$) เมื่อ

$$i_s = \frac{v_s}{R_s} \text{ และ } G_p = \frac{1}{R_s}$$

และในทางกลับกันแหล่งจ่ายกระแสใดๆ ขนานกับความนำ G_p สามารถถูกแทนได้ด้วย v_s และค่าความต้านทานอนุกรม R_s เช่นกัน”

การแปลงแหล่งจ่ายมีประโยชน์ในการทำให้วงจรง่าย ซึ่งอาจทำให้การวิเคราะห์วงจรทำได้ง่ายขึ้น รูปที่ 5.3 สรุปวิธีการแปลงแหล่งจ่าย

เราจะกล่าวว่าวงจรสองวงจรเป็นวงจรคู่หรือดูอัล (Dual Circuit) เมื่อสมการแสดงคุณลักษณะ (Characterizing Equation) ของวงจรหนึ่ง ได้จากการแทน v ด้วย i และ G ด้วย R ในสมการของอีกวงจรหนึ่ง ในการศึกษาวงจรไฟฟ้ามีลักษณะของความเป็นคู่หรือดูอัลลิตี้ (Duality) ระหว่างสองสิ่งอยู่หลายคู่ เช่น กระแสและแรงดัน ความต้านทานและความนำ การต่ออนุกรมและการต่อขนาน เปิดวงจรและปิดวงจร และอื่นๆ ดังจะได้ศึกษาต่อไป

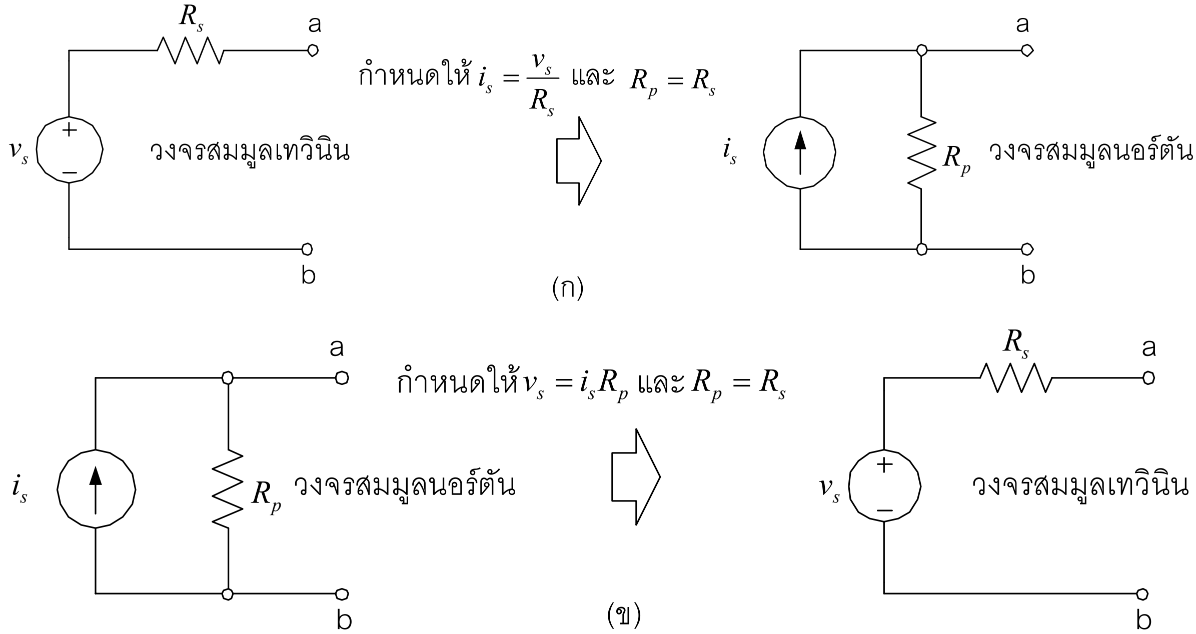
แหล่งจ่ายสมมูลในรูปที่ 5.3 เป็นวงจรคู่ สมการสำหรับแหล่งจ่ายแรงดันเมื่อปิดวงจรคือ

$$i_s = G_p v_s$$

และสมการสำหรับแหล่งจ่ายกระแสเมื่อเปิดวงจรคือ

$$v_s = R_s i_s$$

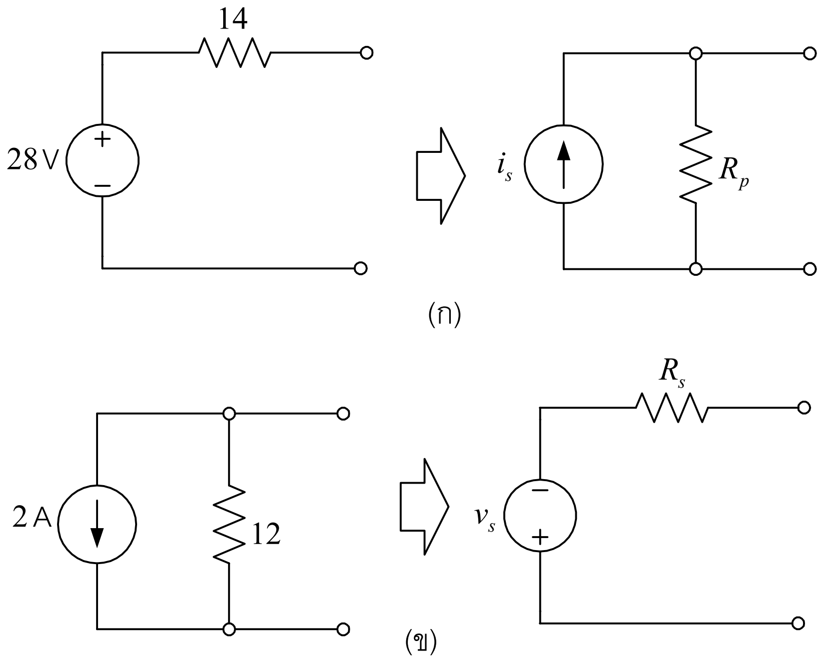
สังเกตว่า แรงดันและกระแสเป็นคู่กัน ความต้านทาน R_s ซึ่งต่ออนุกรมและความนำ G_p ซึ่งต่อขนานเป็นคู่กัน และเงื่อนไขการเปิดและปิดวงจรเป็นคู่กัน เป็นต้น



รูปที่ 5.3 วิธีการแปลงแหล่งจ่าย

(ก) จากแหล่งจ่ายแรงดันเป็นแหล่งจ่ายกระแส (ข) แหล่งจ่ายกระแสเป็นแหล่งจ่ายแรงดัน

ตัวอย่าง 5.1 จงทำการแปลงแหล่งจ่ายในรูป Ex5.1 (ก) และ (ข)



รูปที่ Ex5.1

วิธีทำ ใช้หลักการแปลงที่สรุปไว้ในรูปที่ 5.3 จะได้ว่า แหล่งจ่ายแรงดันในรูป (ก) สามารถแทนด้วยแหล่งจ่ายกระแส ซึ่งมีค่า

$$R_p = R_s = 14\ \Omega$$

และมีค่ากระแส

$$i_s = \frac{v_s}{R_s} = \frac{28}{14} = 2\ \text{A}$$

ส่วนรูป (ข) จะได้

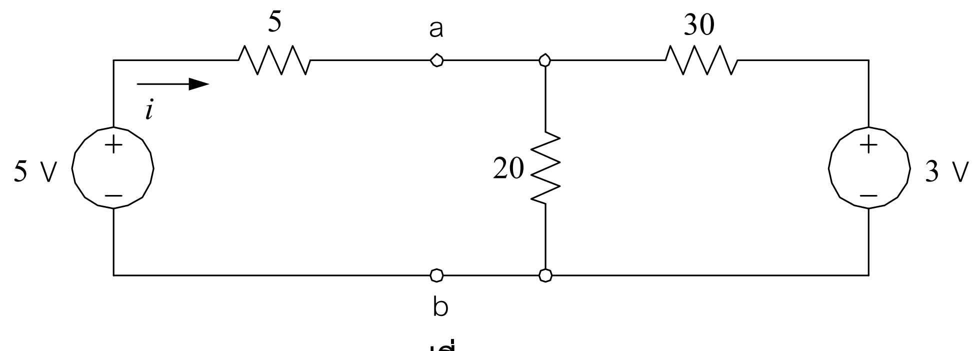
$$R_s = R_p = 12\ \Omega$$

และค่าแรงดัน

$$v_s = i_s R_p = 2 \times 12 = 24\ \text{V}$$

ผลการแปลงดังแสดงในรูป Ex5.1 (ค) และ (ง) สังเกตว่าเครื่องหมายขั้วบวกของแหล่งจ่ายแรงดันในรูป (ง) ปรากฏที่ด้านล่างเนื่องจาก กระแสไหลลงด้านล่าง (รูป (ข))

ตัวอย่าง 5.2 จากวงจรในรูป Ex5.2 (ก) จงหาค่ากระแส โดยลดรูปวงจรด้านขวาลงให้ง่ายที่สุด โดยอาศัยการแปลงแหล่งจ่าย



รูปที่ Ex5.2 (ก)

วิธีทำ ขั้นแรกทำการแปลง แหล่งจ่ายแรงดัน 3 V อนุกรมกับตัวต้านทาน $30\ \Omega$ ให้เป็นแหล่งจ่ายกระแสขนานกับความต้านทาน โดยที่ $R_p = R_s = 30\ \Omega$ และค่ากระแส

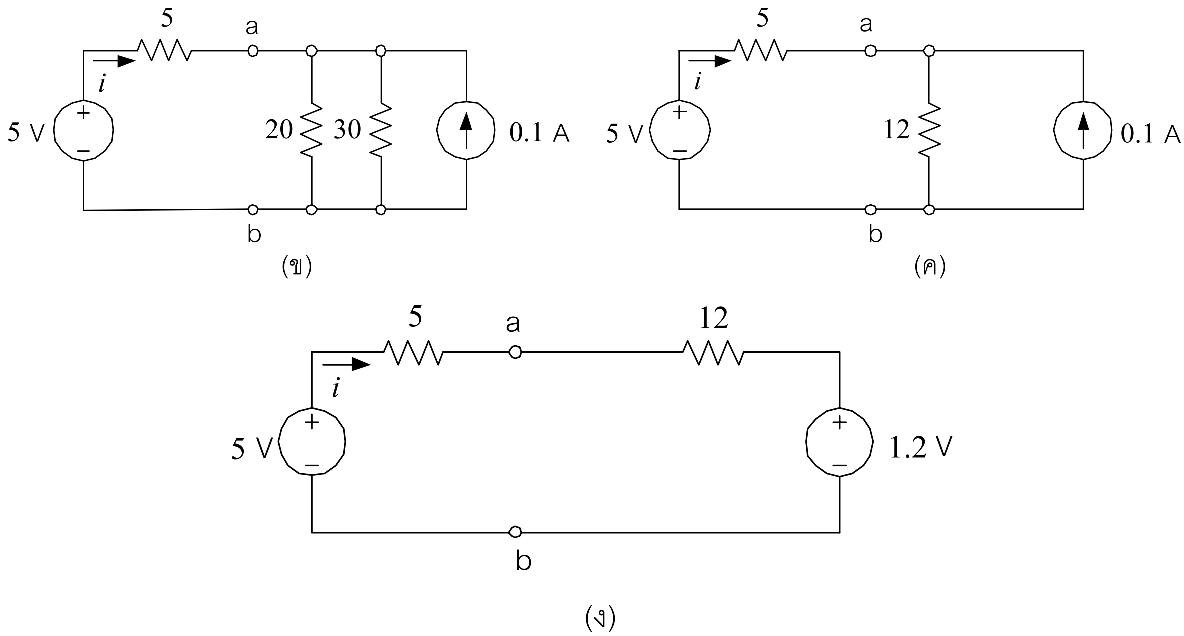
$$i_s = \frac{v_s}{R_s} = \frac{3}{30} = 0.1\ \text{A}$$

ดังแสดงในรูป Ex5.2 (ข) รวมค่าตัวต้านทานที่ขนานกันจะได้ $\frac{30 \times 20}{30 + 20} = 12\ \Omega$ ดังแสดงในรูป Ex5.2 (ค) แปลงแหล่งจ่ายกระแสขนาน 0.1 A กับตัวต้านทาน $12\ \Omega$ เป็นแหล่งจ่ายแรงดัน โดยที่ค่าความต้านทานอนุกรมกับแหล่งจ่ายแรงดันคือ $R_s = 12\ \Omega$ และค่าแรงดัน

$$v_s = i_s R_p = 0.1 \times 12 = 1.2 \quad \text{V}$$

ดังแสดงในรูป Ex5.2 (ง) ค่ากระแส i สามารถหาได้จาก KVL รอบวงรอบในรูป (ง) จะได้

$$i = \frac{3.8}{17} = 0.224 \quad \text{A}$$



รูปที่ Ex5.2 (ข)-(ง)

5.2 ทฤษฎีซุปเปอร์โพสิชัน

ในบทที่ 2 หัวข้อ2.1 เราได้กล่าวถึงคุณสมบัติข้อหนึ่งของการเป็นองค์ประกอบเชิงเส้นคือ การที่องค์ประกอบนั้นมีคุณสมบัติตามหลักการซุปเปอร์โพสิชัน องค์ประกอบเชิงเส้นมีคุณสมบัติตามหลักการซุปเปอร์โพสิชัน เมื่อการตอบสนองต่อการกระตุ้นมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} i_1 &\to v_1 \\ i_2 &\to v_2 \end{aligned} \tag{5.5}$$

แล้ว

$$i_1 + i_2 \to v_1 + v_2$$

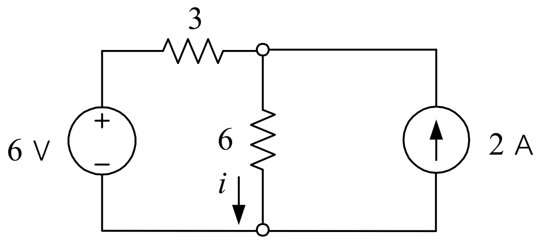
โดยที่สัญลักษณ์ลูกศร ($\to$) แสดงให้เห็น การกระตุ้น $\to$ ผลตอบสนอง

หลักการซุปเปอร์โพสิชัน กล่าวว่า สำหรับอุปกรณ์หรือองค์ประกอบเชิงเส้นและแหล่งจ่ายอิสระใดๆ เราสามารถหาค่าผลตอบสนองสุทธิได้จากการหาผลตอบสนองจากแหล่งจ่ายแต่ละแหล่งจ่าย (พิจารณาทีละแหล่งจ่าย โดยทำให้แหล่งจ่ายอื่นที่ไม่ได้พิจารณามีค่าเป็นศูนย์) แล้วนำผลจากแต่ละแหล่งจ่ายมารวม

กัน นั่นคือผลผลตอบสนองสุทธิจากการกระตุ้นจากแหล่งจ่ายหลายแหล่งพร้อมกันสามารถได้มาโดยนำผลจากการกระตุ้นของแต่ละแหล่งจ่ายครั้งละหนึ่งแหล่งจ่ายมารวมกันแบบพีชคณิต

การทำให้ค่าแหล่งจ่ายที่ยังไม่ได้พิจารณามีค่าเป็นศูนย์สามารถทำได้ดังนี้ ถ้าเป็นแหล่งจ่ายแรงดันให้แทนด้วยปิดวงจร (ทำให้แรงดันมีค่าเป็นศูนย์) ถ้าเป็นแหล่งจ่ายกระแสให้แทนด้วยเปิดวงจร (ทำให้กระแสมีค่าเป็นศูนย์) กรณีที่มีแหล่งจ่ายที่ขึ้นกับตัวแปรอื่นในวงจรให้คงแหล่งจ่ายนั้นไว้ในวงจร

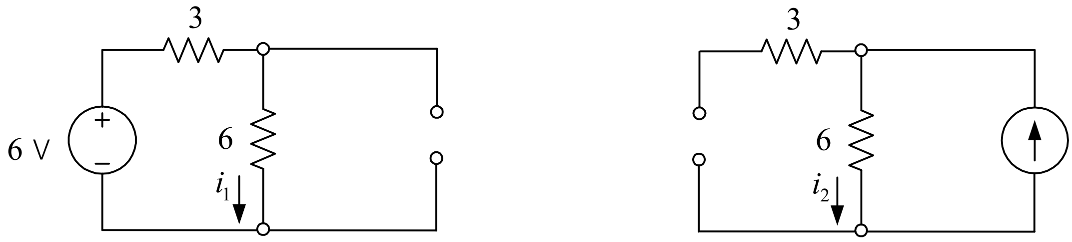
ตัวอย่าง 5.3 จากวงจรในรูป Ex5.3 (ก) จงหาค่ากระแส i ในตัวต้านทาน $6\,\Omega$ โดยใช้หลักการซุปเปอร์โพสิชัน



รูปที่ Ex5.3 (ก)

วิธีทำ เริ่มจากการพิจารณาผลตอบสนอง i_1 จากแหล่งจ่ายแรงดันก่อน แทนแหล่งจ่ายกระแสด้วยเปิดวงจร ดังแสดงในรูป Ex5.3 (ข)

$$i_1 = \frac{6}{9} \text{ A}$$



(ข) (ค)

รูปที่ Ex5.3 (ข)-(ค)

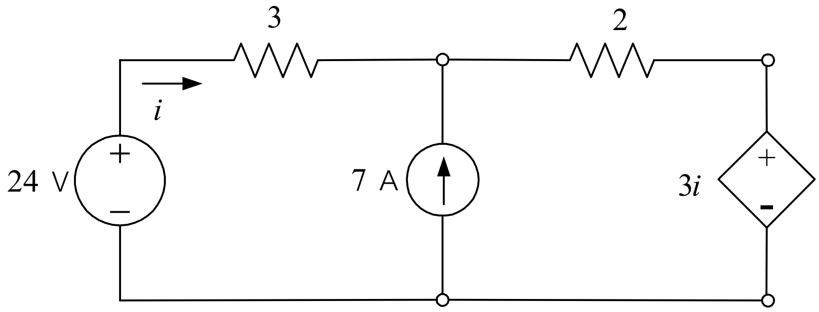
ขั้นต่อมาพิจารณาผลตอบสนอง i_2 จากแหล่งจ่ายกระแส แทนแหล่งจ่ายแรงดันด้วย ปิดวงจร ดังแสดงในรูป Ex5.3 (ค) จะได้

$$i_2 = \frac{3}{3+6} \times 2 = \frac{6}{9} \text{ A}$$

การตอบสนองสุทธิ กระแส i คือผลรวมพีชคณิตของกระแส i_1 และ i_2

$$i = i_1 + i_2 = \frac{12}{9} \text{ A}$$

ตัวอย่าง 5.4 จากวงจรในรูป 5.4 (ก) จงหาค่ากระแส i



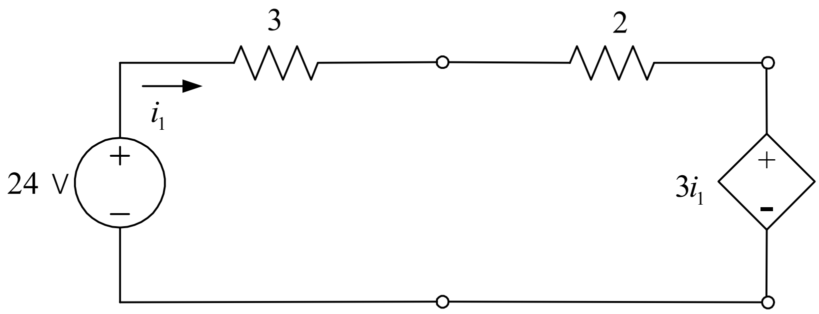
รูปที่ Ex5.4 (ก)

วิธีทำ ในวงจรนี้มีแหล่งจ่ายอิสระสองแหล่งจ่าย คือแหล่งจ่ายแรงดันและแหล่งจ่ายกระแส เริ่มโดยการหาผลตอบสนอง i_1 จากแหล่งจ่ายแรงดันก่อน แทนแหล่งจ่ายกระแสด้วยเปิดวงจร ดังแสดงในรูป Ex5.4 (ข) ใช้ KVL รอบวงรอบได้

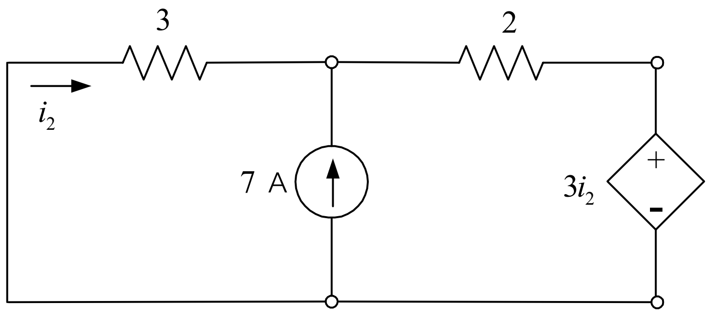
$$-24+(3+2)i_1+3i_1=0$$

หรือ

$$i_1=3 \text{ A}$$



(ข)



(ค)

รูปที่ Ex5.4 (ข)-(ค)

ขั้นต่อมาพิจารณาผลตอบสนอง i_2 จากแหล่งจ่ายกระแส แทนแหล่งจ่ายแรงดันด้วย ปิดวงจร ดังแสดงในรูป Ex5.4 (ค) จะได้จาก KCL

$$-i_2 - 7 + \frac{v_a - 3i_2}{2} = 0$$

สังเกตจากกฎของโอห์มว่า $-i_2 = \frac{v_a}{3}$ หรือ $v_a = -3i_2$ แทนค่า v_a ลงในสมการ KCL ข้างต้น

$$-i_2 - 7 + \frac{-3i_2 - 3i_2}{2} = 0$$

ดังนั้น

$$i_2 = -\frac{7}{4} \text{ A}$$

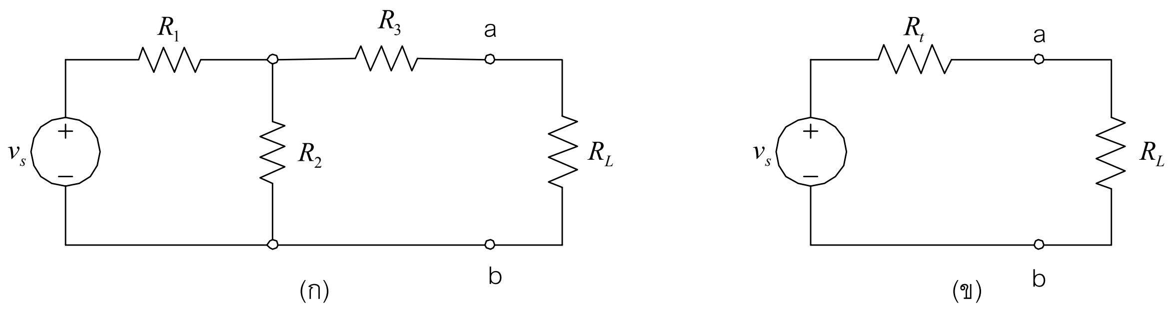
ได้ค่ากระแสสุทธิ

$$i = i_1 + i_2 = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4} \text{ A}$$

5.3 ทฤษฎีวงจรสมมูลของเทวินิน

วิศวกรชาวฝรั่งเศสชื่อเทวินิน (Thevenin) ได้พัฒนางานต่อจากเฮล์มโฮลท์ (Helmholtz) และตีพิมพ์หลักการของทฤษฎีบทเทวินินในปี ค.ศ. 1883 (พ.ศ. 2426) โดยเป้าหมายของการใช้ทฤษฎีนี้คือการลดรูปบางส่วนของวงจรโดยการแทนที่ด้วยแหล่งจ่ายสมมูล (Equivalent Source) และความต้านทานสมมูล (Equivalent Resistance) วงจรส่วนที่ลดและแทนที่แล้วจะต่ออยู่กับส่วนที่เหลือของวงจร และจะทำให้สามารถหาค่าของตัวแปรที่เราสนใจได้ง่ายและสะดวกมากขึ้น

ทฤษฎีบทของเทวินินอาศัยพื้นฐานของวงจรสมมูล เช่นเดียวกับหลักการแปลงแหล่งจ่ายที่ได้ศึกษาไปแล้ว พิจารณาวงจรในรูปที่ 5.4 (ก) ถ้าเราต้องการหาค่ากระแสหรือกำลังที่ส่งไปให้กับตัวต้านทานโหลด R_L ส่วนที่เหลือของวงจรนอกจาก R_L สามารถลดรูป โดยอาศัยทฤษฎีบทของเทวินินได้ดังแสดงในรูปที่ 5.4 (ข) วงจรสมมูลเทวินินอยู่ด้านซ้ายของขั้ว a - b ประกอบด้วย แหล่งจ่ายแรงดันสมมูลเทวินิน (Thevenin's Equivalent Source, v_t) และความต้านทานสมมูลเทวินิน (Thevenin's Equivalent Resistance, R_t) ซึ่งต่ออนุกรมอยู่กับแหล่งจ่าย



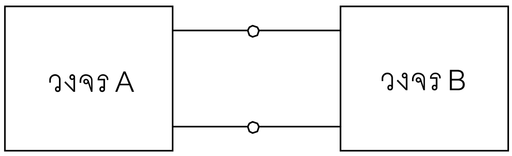
รูปที่ 5.4 (ก) วงจรตัวอย่าง (ข) วงจรสมมูลเทวินินต่อกับตัวต้านทานโหลด R_L

จะเห็นว่าทฤษฎีบทของเทวินินมีประโยชน์มากในการลดรูปวงจรในกรณีที่ต้องการหาค่า กระแส แรงดัน หรือกำลังที่เกี่ยวข้องกับองค์ประกอบของวงจรตัวใดตัวหนึ่ง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่องค์ประกอบนั้นเป็นตัวแปรที่เปลี่ยนค่าได้ เราจะลดรูปส่วนอื่นของวงจร แทนด้วยวงจรสมมูลเทวินิน และต่อเข้ากับองค์ประกอบที่สนใจดังเดิม

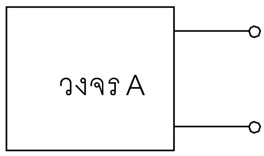
ทฤษฎีบทของเทวินิน กล่าวไว้ดังนี้ สำหรับวงจรเชิงเส้นใดๆ แบ่งออกเป็นสองส่วน A และ B แต่ละส่วนต่อกันที่ขั้วเดียวกันคู่หนึ่ง a - b ถ้าวงจรมีแหล่งจ่ายขึ้นกับตัวแปรอื่น ต้องแบ่งให้ทั้งตัวควบคุมและตัวถูกควบคุมอยู่ในส่วนเดียวกัน จากนั้นหาวงจรสมมูลเทวินินของส่วน A นิยาม v_{oc} ว่าเป็นแรงดันเปิดวงจรที่ขั้ว a - b ของวงจรส่วน A เมื่อเปิดวงจร (หรือถอดเอาส่วน B ออก) ดังนั้นจะได้วงจรสมมูลเทวินินของส่วน A คือ แหล่งจ่ายแรงดันสมมูล $v_t = v_{oc}$ อนุกรมกับ ความต้านทานสมมูล R_t ซึ่งได้จากความต้านทานสมมูลเมื่อมองเข้าสู่วงจรส่วน A จากขั้ว a - b โดยทำการทำให้แหล่งจ่ายอิสระทั้งหมดในวงจรส่วน A ไม่มีผลต่อวงจร (ให้มีค่าเป็นศูนย์ คือแทนด้วยเปิดวงจรสำหรับแหล่งจ่ายกระแส และปิดวงจรสำหรับแหล่งจ่ายแรงดัน)

รูปที่ 5.5 สรุปขั้นตอนการใช้ทฤษฎีบทของเทวินิน ในการแทนวงจรส่วน A (รูป5.5 (ข)) ด้วยวงจรสมมูลเทวินิน (รูป5.5 (ค))

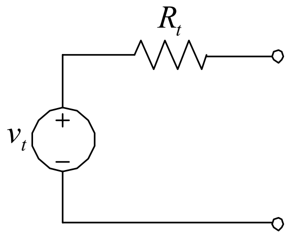
(ก) ระบุส่วนของวงจร A และวงจร B



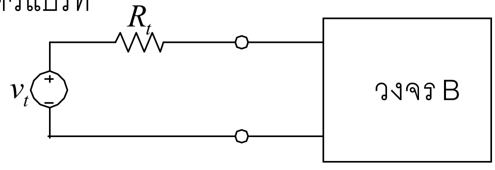
(ข) แยกเฉพาะส่วนวงจร A มาพิจารณา



(ค) แทนส่วนวงจร A ด้วยวงจรสมมูลเทวินิน

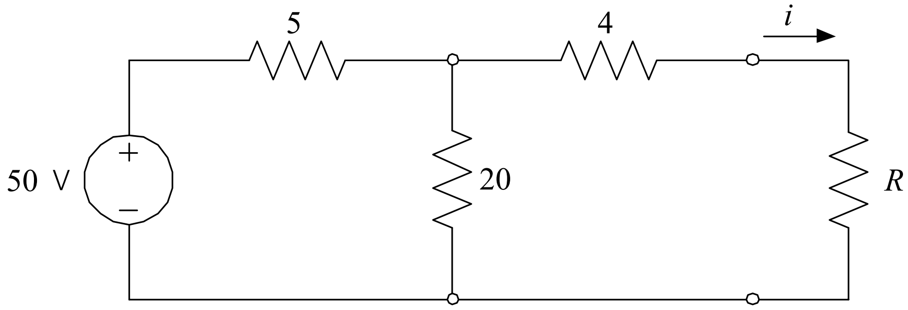


(ง) ทำการเชื่อมต่อวงจร B และหาค่าตัวแปรที่สนใจ เช่น กระแส เป็นต้น



รูปที่ 5.5 ขั้นตอนการใช้ทฤษฎีบทของเทวินิน ในการแทนวงจรส่วน A

ตัวอย่าง 5.5 จงใช้ทฤษฎีบทของเทวินิน ในการหาค่ากระแส i ผ่านตัวต้านทาน R ในวงจรในรูป Ex5.5 (ก)



รูปที่ Ex5.5 (ก)

วิธีทำ เนื่องจากเราสนใจค่ากระแส i เราจะแยกตัวต้านทาน R ว่าเป็นส่วนของวงจร B ส่วนที่เหลือคือส่วน A ดังแสดงในรูป Ex5.5 (ข) ค่าความต้านทานสมมูล R_t หาได้จากวงจรในรูป Ex5.5 (ค) โดยการคำนวณหาค่าความต้านทานสมมูลเมื่อมองเข้าสู่ขั้วได้ ดังนี้

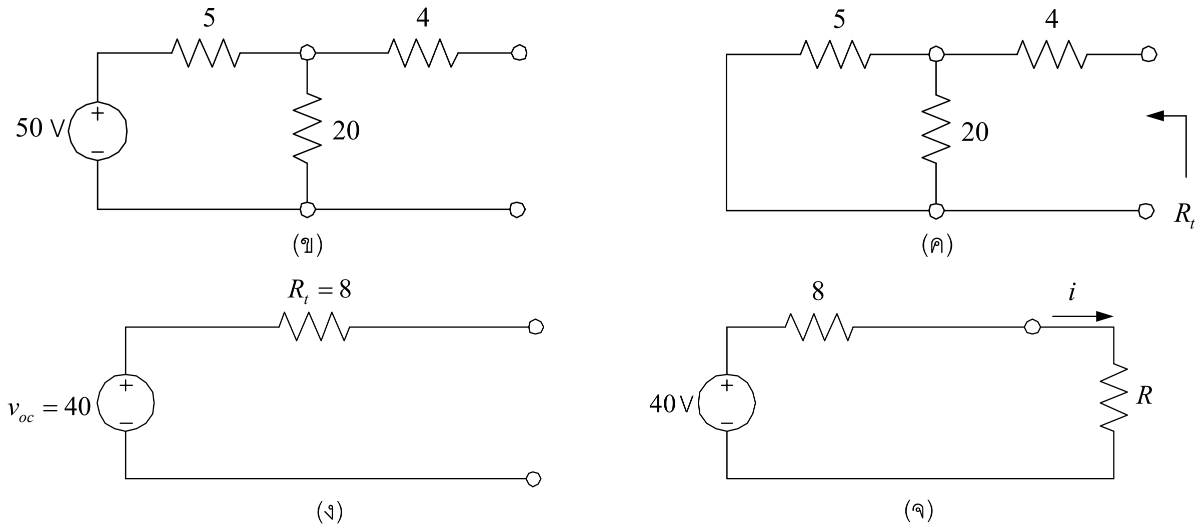
$$R_t = \frac{5\times 20}{5+20} + 4 = 8\,\Omega$$

ค่าแรงดันสมมูลเทวินินคือแรงดันเปิดวงจรที่ขั้ว หาได้จากการใช้หลักการแบ่งแรงดันในรูป Ex5.5 (ข)

$$v_{oc} = \frac{20}{20+5} 50 = 40 \text{ V}$$

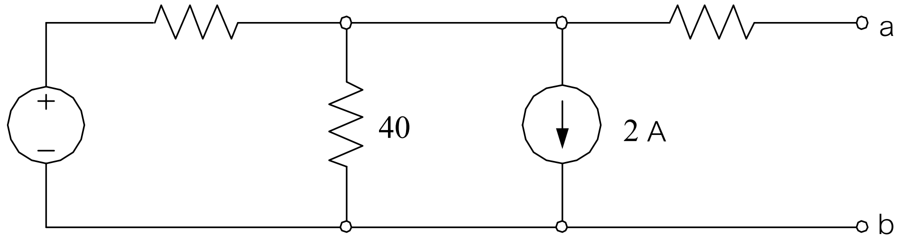
จะได้วงจรสมมูลเทวินิน ดังในรูป Ex5.5 (ง) ต่อตัวต้านทานเข้ากับวงจรสมมูลเทวินิน ดังในรูป Ex5.5 (จ) และคำนวณหาค่า กระแส i ได้ดังนี้

$$i = \frac{40}{R+8} \text{ A}$$



รูปที่ Ex5.5 (ข)-(จ)

ตัวอย่าง 5.6 จงใช้ทฤษฎีบทของเทวินิน ในการหาวงจรสมมูลเทวินิน ของวงจรในรูป Ex5.6 (ก)



รูปที่ Ex5.6 (ก)

วิธีทำ หาค่าแรงดันสมมูลเทวินินคือแรงดันเปิดวงจรที่ขั้ว a - b และค่าความต้านทานสมมูลเมื่อมองเข้าสู่วงจรจากขั้ว a - b ในการหาค่าความต้านทานสมมูลเราจะ ทำการเปิดวงจรแหล่งจ่ายกระแสและปิดวงจรแหล่งจ่ายแรงดัน ดังแสดงในรูป Ex5.6 (ข) ค่าความต้านทานสมมูล R_t จะได้

$$R_t = \frac{10 \times 40}{10 + 40} + 4 = 12\ \Omega$$

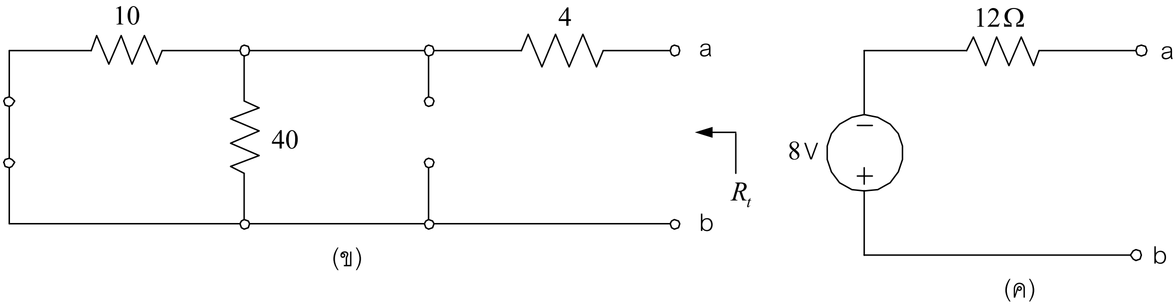
ต่อมาหาค่าแรงดันสมมูล v_t คือแรงดันเปิดวงจรที่ขั้ว a - b ของวงจรในรูป Ex5.6 (ก) ซึ่งเท่ากับแรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน $40\,\Omega$ หรือ v_c เนื่องจากไม่มีกระแสไหลในตัวต้านทาน $4\,\Omega$ ใช้โนดล่างเป็นโนดอ้างอิง เขียน KCL ที่โนด c ได้ดังนี้

$$\frac{v_c - 10}{10} + \frac{v_c}{40} + 2 = 0$$

แก้สมการหาค่า v_c ได้

$$v_c = -8\ \text{V}$$

ดังนั้นจะได้วงจรสมมูลเทวินิน ของวงจรในตัวอย่างนี้ดังในรูปที่ Ex5.6 (ค)

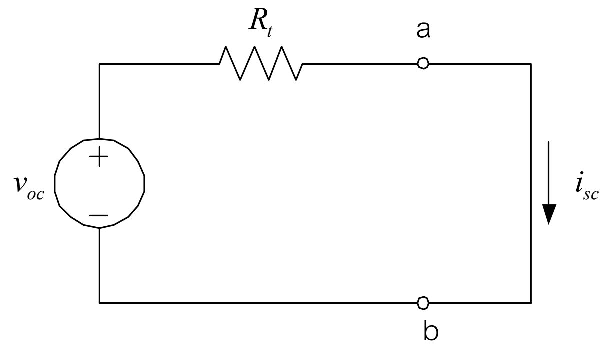


รูปที่ Ex5.5 (ข)-(ค)

อีกวิธีหนึ่งในการหาค่าความต้านทานสมมูล R_t คือ การหาค่าแรงดันสมมูล v_{oc} จากนั้นหาค่ากระแสลัดวงจร i_{sc} เมื่อขั้ว a - b ถูกปิดวงจรดังแสดงในรูปที่ 5.6 โดยที่จาก KVL

$$-v_{oc} + R_t i_{sc} = 0$$

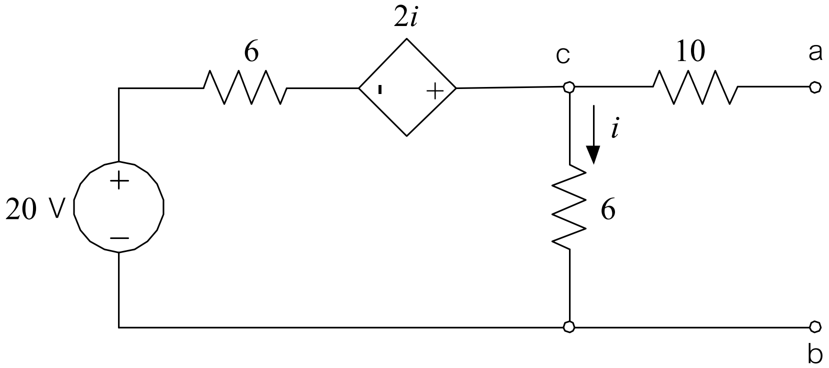
$$\therefore\quad R_t = \frac{v_{oc}}{i_{sc}}$$



รูปที่ 5.6 วงจรสมมูลเทวินินซึ่งทำการลัดวงจรที่ขั้ว a - b

วิธีนี้น่าสนใจเพราะว่าเราต้องการทราบค่าแรงดันสมมูล v_{oc} อยู่แล้ว และในทางปฏิบัติก็สะดวกที่จะวัดค่าแรงดันเปิดวงจรด้วยโวลท์มิเตอร์และวัดค่ากระแสลัดวงจรด้วยแอมป์มิเตอร์

ตัวอย่าง 5.7 จงใช้ทฤษฎีบทของเทวินิน ในการหาวงจรสมมูลเทวินิน ของวงจรในรูป Ex5.7 (ก) ซึ่งมีแหล่งจ่ายแรงดันควบคุมด้วยกระแสเป็นส่วนประกอบด้วย



รูปที่ Ex5.7 (ก)

วิธีทำ เริ่มจากการหาค่าแรงดันสมมูลเทวินิน ซึ่งเท่ากับแรงดันเปิดวงจรที่ขั้ว a - b เนื่องจากไม่มีกระแสไหลในตัวต้านทาน $10\,\Omega$ จะเท่ากับแรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน $6\,\Omega$ ที่ต่อระหว่างขั้ว c - b

จากการเขียน KVL รอบเมช

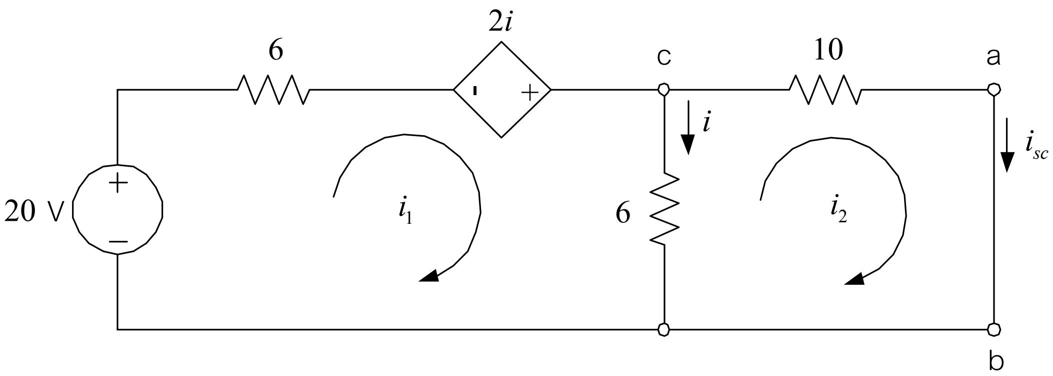
$$-20 + 6i - 2i + 6i = 0$$

ดังนั้น

$$i = 2 \quad \text{A}$$

แรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน $6\,\Omega$ ที่ต่อระหว่างขั้ว c - b คือ

$$v_{oc} = 6i = 12 \quad \text{V}$$



รูปที่ Ex5.7 (ข)

ขั้นตอนต่อมาคือการหาค่ากระแสลัดวงจร i_{sc} จากรูป Ex5.7 (ข) ใช้ KVL เขียนสมการจากสองเมชได้

$$-20+6i-2i+6(i_1-i_2)=0$$

และ

$$6(i_2-i_1)+10i_2=0$$

แทนค่า $i=i_1-i_2$ และเรียบเรียงสมการทั้งสองใหม่

$$10i_1-4i_2=20$$

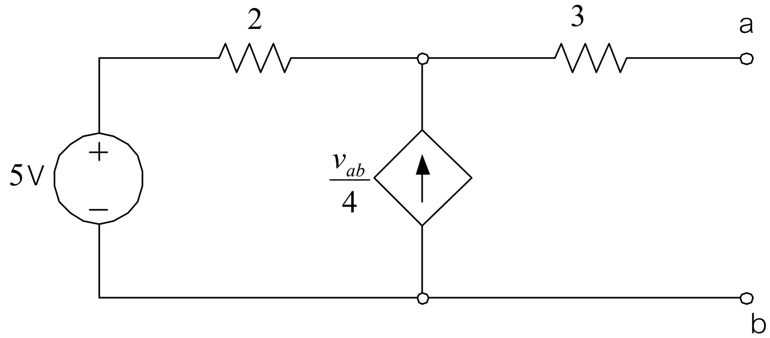
และ

$$-6i_1+16i_2=0$$

แก้สมการหาค่า $i_2=i_{sc}=\dfrac{120}{36}$ A ดังนั้นจะได้ค่าแรงดันสมมูลเทวินิน

$$R_t=\frac{v_{oc}}{i_{sc}}=\frac{12}{120/136}=13.6\,\Omega$$

ตัวอย่าง 5.8 จงหาวงจรสมมูลเทวินิน ของวงจรในรูป Ex5.8 (ก) ซึ่งมีแหล่งจ่ายกระแสควบคุมด้วยแรงดันเป็นส่วนประกอบด้วย



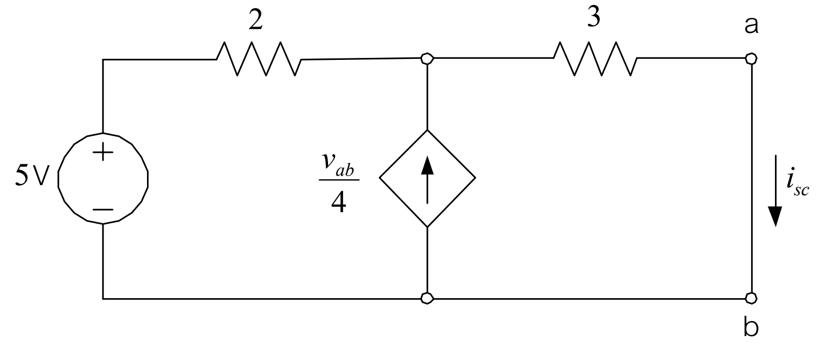
รูปที่ Ex5.8 (ก)

วิธีทำ เริ่มจากการหาค่าแรงดันสมมูลเทวินิน ซึ่งเท่ากับแรงดันเปิดวงจรที่ขั้ว a - b สังเกตว่าแหล่งจ่ายกระแสควบคุมด้วยแรงดันอยู่ร่วมระหว่างสองเมช เราจะสร้างเมชพิเศษซึ่งรวม v_{ab} อยู่ด้วย และเขียน KVL เพียงหนึ่งสมการ และสังเกตด้วยว่าไม่มีกระแสไหลในตัวต้านทาน $3\,\Omega$

$$-5+2\left(\frac{-v_{ab}}{4}\right)+3\times 0+v_{ab}=0$$

ดังนั้นจะได้

$$v_{ab}=10 \text{ V}$$



รูปที่ Ex5.8 (ข)

เพื่อหาค่ากระแสลัดวงจร เราใส่ปิดวงจรระหว่างขั้ว a - b ดังรูป Ex5.8 (ข) เนื่องจากค่า $v_{ab}=0$ ทำให้แหล่งจ่ายกระแสมีค่าเป็นศูนย์ด้วย ใช้ KVL รอบเมชพิเศษ

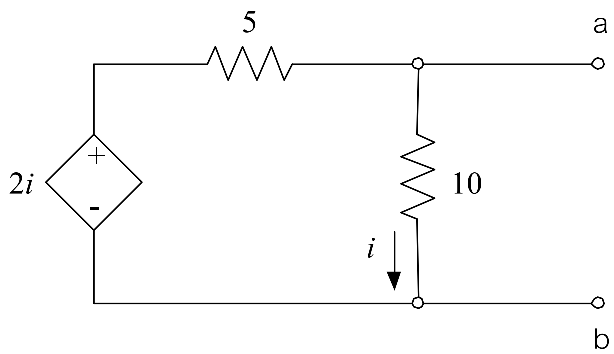
$$-5+(2+3)i_{sc}=0$$

หรือ

$$i_{sc}=1 \text{ A}$$

และจะได้ค่าความต้านทานสมมูลเทวินิน

$$R_t=\frac{v_{oc}}{i_{sc}}=10\,\Omega$$



รูปที่ 5.7 วงจรที่ไม่มีแหล่งจ่ายอิสระ

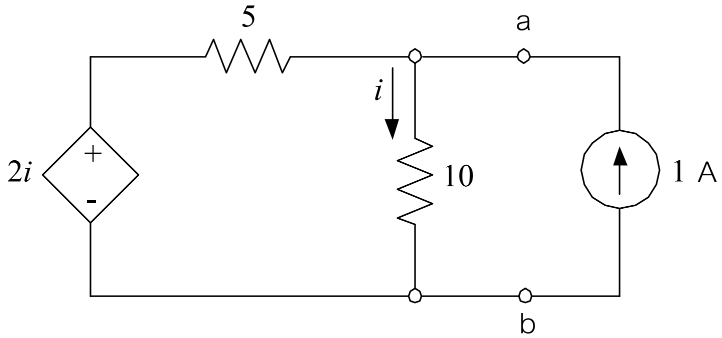
ลักษณะวงจรอีกแบบหนึ่งที่อาจจะพบคือวงจรที่ไม่มีแหล่งจ่ายอิสระอยู่เลยแต่มีแหล่งจ่ายขึ้นกับตัวแปรอื่นอยู่ตั้งแต่หนึ่งแหล่งจ่ายขึ้นไป ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.7 เราต้องการหาวงจรสมมูลเทวินิน ดังนั้นเราจะหาค่าแรงดันสมมูลเทวินิน v_t และค่าความต้านทานสมมูลเทวินิน R_t ที่ขั้ว a - b

เนื่องจากวงจรไม่มีแหล่งจ่ายอิสระดังนั้น ค่ากระแส $i = 0$ เมื่อขั้ว a - b คือเปิดวงจร จะได้

$$v_{oc} = 0$$

และในทำนองเดียวกันจะได้ค่ากระแสลัดวงจร $i_{sc} = 0$ ยังเหลือค่าความต้านทานสมมูล R_t ซึ่งในกรณีนี้ไม่สามารถหาได้จาก $R_t = \dfrac{v_{oc}}{i_{sc}}$ เนื่องจากค่าทั้งสองเป็นศูนย์ แต่จะใช้วิธีการต่อแหล่งจ่ายจากภายนอกเช่นต่อแหล่งจ่ายแรงดัน เพื่อหาค่ากระแสที่จะไหลเข้าสู่ขั้ว a - b หรือต่อแหล่งจ่ายกระแส ดังเช่นในรูปที่ 5.8 ซึ่งจะทำการต่อแหล่งจ่ายกระแส 1 A เพื่อหาค่าแรงดันตกคร่อมขั้ว a - b เมื่อได้ค่าแรงดัน จะคำนวณค่าความต้านทานสมมูลได้จาก

$$R_t = \frac{v_{ab}}{1\text{ A}}$$



รูปที่ 5.8 การต่อแหล่งจ่ายกระแสจากภายนอกเข้ากับวงจรที่ไม่มีแหล่งจ่ายอิสระ

เรานิยมใช้ค่าแหล่งจ่ายที่มีขนาดเป็นหนึ่งหน่วยเนื่องจากสะดวกในการคำนวณหาค่าความต้านทานนั่นเอง

เขียน KCL เพื่อหาค่าแรงดัน v_{ab} ถ้ากำหนดโนด b เป็นโนดอ้างอิงจะได้

$$\frac{v_a - 2i}{5} + \frac{v_a}{10} - 1 = 0$$

สำหรับตัวต้านทาน $10\,\Omega$

$$i = \frac{v_a}{10}$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{v_a - 2(v_a/10)}{5} + \frac{v_a}{10} = 1$$

หรือ

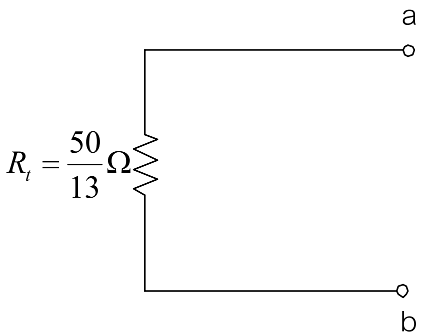
$$v_a = \frac{50}{13} \text{ V}$$

และจะได้ค่าความต้านทานสมมูลเทวินิน

$$R_t = \frac{50/13}{1} = \frac{50}{13}\,\Omega$$

รูปที่ 5.9 แสดงวงจรสมมูลเทวินินของวงจรนี้ หากเลือกใช้แหล่งจ่ายแรงดัน 1 V ป้อนเข้าที่ขั้ว a – b และหาค่ากระแส i_a ที่ไหลเข้าสู่ขั้ว a จะคำนวณค่าความต้านทานสมมูลได้จาก

$$R_t = \frac{1\text{ V}}{i_a}$$



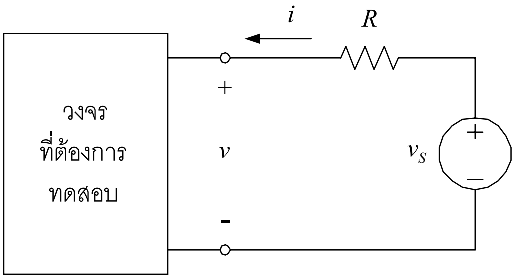
รูปที่ 5.9 วงจรสมมูลเทวินินของวงจรในรูปที่ 5.7

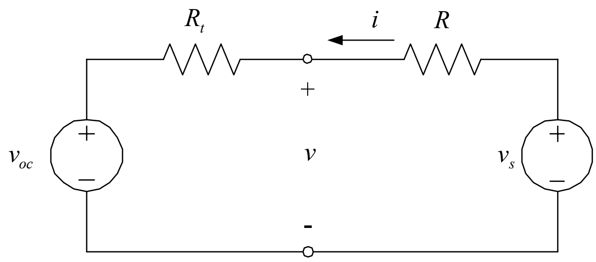
แนวคิดในการหาค่าความต้านทานสมมูลด้วยการป้อนแหล่งจ่ายภายนอกที่เรียกทั่วไปว่าแหล่งจ่ายทดสอบ (Test Source) นั้นสามารถนำไปใช้ในกรณีที่วงจรมีแหล่งจ่ายอิสระอยู่ในวงจรได้ด้วย โดยการกำหนดให้แหล่งจ่ายอิสระทั้งหมดมีค่าเป็นศูนย์ แล้วทำตามขั้นตอนที่กล่าวมาแล้วข้างต้น

ตารางที่ 5.1 สรุปวิธีการหาวงจรสมมูลเทวินิน แบ่งเป็นสามวิธีที่นิยมใช้กันมาก

วงจร	วิธี
1. ตัวต้านทานและแหล่งจ่ายอิสระ	• หาค่า v_{oc} • ทำให้แหล่งจ่ายทั้งหมดมีค่าเป็นศูนย์ หาค่า R_t โดยวิธีลดรูปวงจร
2. (ก) ตัวต้านทาน แหล่งจ่ายอิสระ และ แหล่งจ่ายขึ้นกับตัวแปรอื่น (ข) ตัวต้านทานและแหล่งจ่ายอิสระ	• หาค่า v_{oc} • ปิดวงจรขั้ว a - b หาค่ากระแสลัดวงจร i_{sc} • หาค่า R_t จาก $R_t = \dfrac{v_{oc}}{i_{sc}}$

วงจร	วิธี
3. ตัวต้านทานและแหล่งขึ้นกับตัวแปรอื่น	• ค่า v_{oc} จะเป็นศูนย์ • ต่อแหล่งจ่ายทดสอบที่ขั้ว a - b หากต่อ 1 V หาค่ากระแส i_a หากต่อ 1 A หาค่าแรงดัน v_{ab} • หาค่า R_t จาก $R_t = \frac{1\text{ V}}{i_a}$ หรือ $R_t = \frac{v_{ab}}{1\text{ A}}$ แล้วแต่กรณี





รูปที่ 5.10 การทดลองหาวงจรสมมูลเทวินินในห้องปฏิบัติการ

(ก) การต่อวงจรที่ต้องการทดสอบเข้ากับแหล่งจ่าย v_s

(ข) เขียนวงจรสมมูลเทวินินของวงจรที่ต้องการทดสอบ

ในการทดลองในห้องปฏิบัติการเพื่อหาวงจรสมมูลเทวินิน ของวงจรที่ต้องการทดสอบ (Circuit Under Test) ทำได้โดยการวัดค่ากระแส i และแรงดัน v เมื่อกำหนดค่าแรงดันของแหล่งจ่าย v_s ซึ่งต่ออนุกรมกับค่าความต้านทานคงที่ R ค่าหนึ่ง ทำการทดลองโดยปรับให้ได้ค่า v_s ตั้งแต่สองค่าขึ้นไป ดังแสดงในรูปที่ 5.10 (ก) เมื่อเราแทนวงจรที่ต้องการทดสอบด้วย วงจรสมมูลเทวินินของมันดังในรูปที่ 5.10 (ข) จะได้

$$v = v_{oc} + iR_t \qquad (5.6)$$

สมมติว่าใช้ค่า $R = 10\,\Omega$ พิจารณาผลการทดลองสองครั้ง

1. $v_s = 49$ V $i = 0.5$ A $v = 44$ V
2. $v_s = 76$ V $i = 2$ A $v = 56$ V

เราจะได้สมการสองสมการที่เป็นอิสระต่อกัน โดยใช้ (5.6)

$$44 = v_{oc} + 0.5R_t$$

$$56 = v_{oc} + 2R_t$$

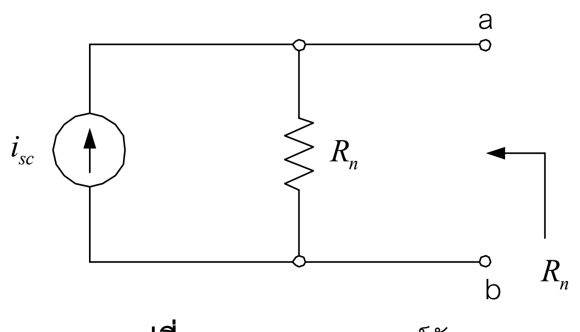
แก้สมการจะได้ $R_t = 8\,\Omega$ และ $v_{oc} = 40$ V

5.4 ทฤษฎีวงจรสมมูลของนอร์ตัน

วิศวกรอเมริกันชื่อ นอร์ตัน ได้เสนอวงจรสมมูลเพื่อแทนวงจรส่วน A ในรูปที่ 5.5 โดยจะใช้แหล่งจ่ายกระแสและความต้านทานสมมูล เรียกว่าวงจรสมมูลนอร์ตัน (Norton’s Equivalent Circuit) ซึ่งเป็นวงจรคู่ของวงจรสมมูลเทวินิน โดยเขาได้ตีพิมพ์วิธีการนี้เมื่อปี ค.ศ. 1926 (พ.ศ. 2469) หลังจากผลงานของเทวินินถึง 43 ปี เราสามารถหาวงจรสมมูลนอร์ตันได้จากวงจรสมมูลเทวินินโดยการใช้การแปลงแหล่งจ่าย

ทฤษฎีบทของนอร์ตัน กล่าวไว้ดังนี้ สำหรับวงจรเชิงเส้นใดๆ แบ่งออกเป็นสองส่วน A และ B แต่ละส่วนต่อกันที่ขั้วเดียวกันคู่หนึ่ง a - b ถ้าวงจรมีแหล่งจ่ายขึ้นกับตัวแปรอื่น ต้องแบ่งให้ทั้งตัวควบคุมและตัวถูกควบคุมอยู่ในส่วนเดียวกัน จากนั้นหาวงจรสมมูลนอร์ตันของส่วน A นิยาม i_{sc} ว่าเป็นกระแสลัดวงจรที่ขั้ว a - b ของวงจรส่วน A เมื่อปิดวงจร ดังนั้นจะได้วงจรสมมูลนอร์ตันของส่วน A คือ แหล่งจ่ายกระแสสมมูล $i_n = i_{sc}$ ขนานกับ ความต้านทานสมมูล R_n ซึ่งได้จากความต้านทานสมมูลเมื่อมองเข้าสู่วงจรส่วน A จากขั้ว a - b โดยทำการทำให้แหล่งจ่ายอิสระทั้งหมดในวงจรส่วน A ไม่มีผลต่อวงจร (ให้มีค่าเป็นศูนย์ คือแทนด้วยเปิดวงจรสำหรับแหล่งจ่ายกระแส และปิดวงจรสำหรับแหล่งจ่ายแรงดัน)

รูปที่ 5.11 แสดงวงจรสมมูลนอร์ตัน ซึ่งจะเห็นได้ว่าคือวงจรคู่ของวงจรสมมูลเทวินิน โดย $R_n = R_t$ และ $v_{oc} = R_t i_{sc}$

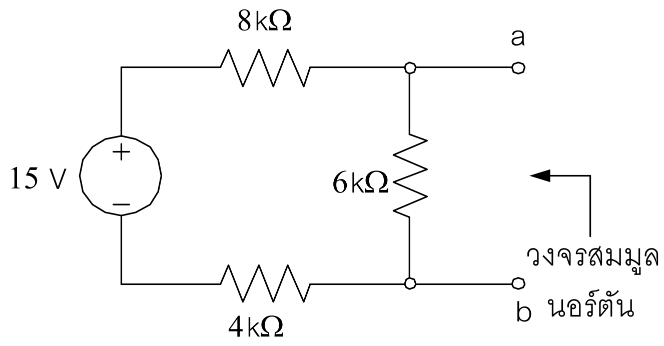


รูปที่ 5.11 วงจรสมมูลนอร์ตัน

ตัวอย่าง 5.9 จงหาวงจรสมมูลนอร์ตันของวงจรในรูป Ex5.9 (ก)

วิธีทำ เนื่องจากในวงจรมีแต่แหล่งจ่ายอิสระ เราสามารถทำให้แหล่งจ่ายทั้งหมดมีค่าเป็นศูนย์เพื่อหาค่าความต้านทานสมมูล R_n โดยการลดรูปวงจร ซึ่งเมื่อทำการลัดวงจรที่แหล่งจ่ายแรงดันจะได้ความตัวต้านทาน $6\,\Omega$ ขนานกับตัวต้านทาน $8\,\Omega$ ซึ่งอนุกรมกับตัวต้านทาน $4\,\Omega$ ดังนั้นจะได้ความต้านทานสมมูล

$$R_n = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4\,\Omega$$



รูปที่ Ex5.9 (ก)

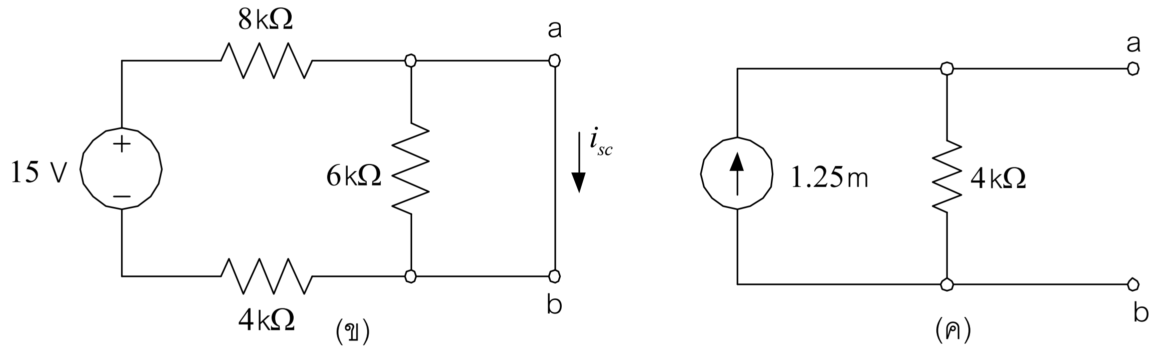
เพื่อหาค่ากระแสลัดวงจรเราจะทำการปิดวงจรขั้ว a - b ดังในรูป Ex5.9 (ข) เขียน KCL ที่โนด a เราได้

$$-\frac{15\text{ V}}{12\text{ k}\Omega}+i_{sc}=0$$

หรือ

$$i_{sc}=1.25\text{ m}$$

รูป Ex 5.9 (ค) แสดงวงจรสมมูลนอร์ตันของวงจรในตัวอย่างนี้



รูปที่ Ex5.9 (ข)-(ค)

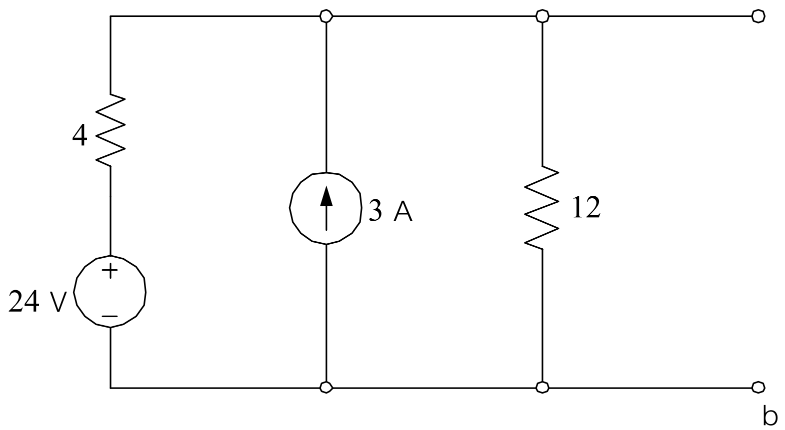
ตัวอย่าง 5.10 จงหาวงจรสมมูลนอร์ตันของวงจรในรูป Ex5.10 (ก)

วิธีทำ เพื่อหาค่ากระแสลัดวงจรเราจะทำการปิดวงจรขั้ว a - b ดังในรูป Ex5.10 (ข) เขียน KCL ที่โนด a เราได้

$$-\frac{24\text{ V}}{4\ \Omega}-3+i_{sc}=0$$

สังเกตว่าไม่มีกระแสไหลผ่านตัวต้านทาน $12\,\Omega$ เนื่องจากมันขนานกับปิดวงจร แก้สมการหาค่ากระแสลัดวงจรได้

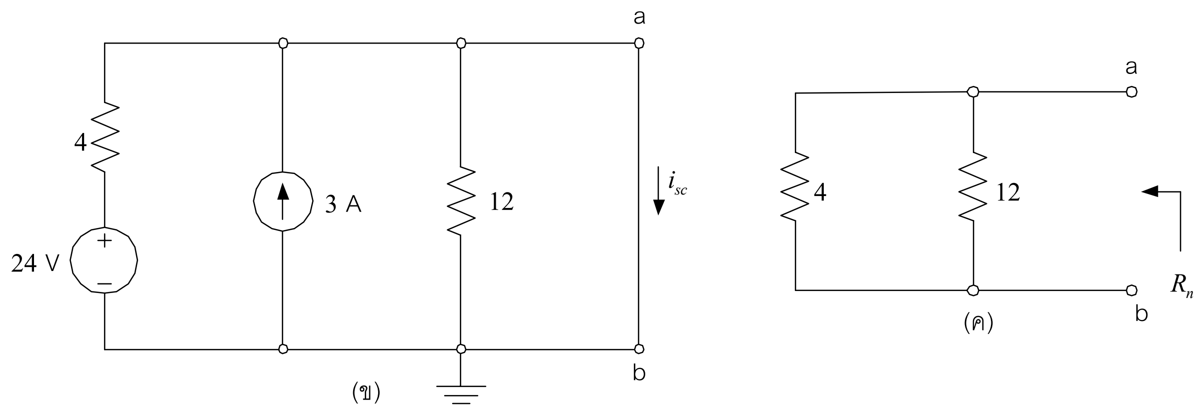
$$i_{sc}=9\quad\text{A}$$



รูปที่ Ex5.10 (ก)

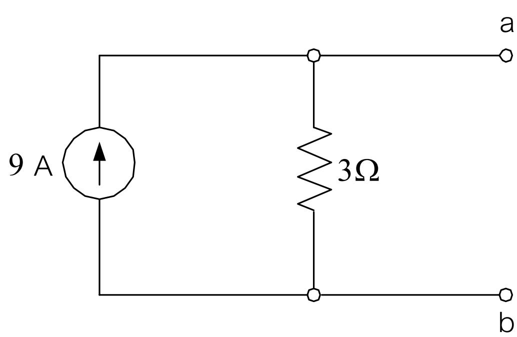
เนื่องจากในวงจรมีแต่แหล่งจ่ายอิสระ เราสามารถทำให้แหล่งจ่ายทั้งหมดมีค่าเป็นศูนย์เพื่อหาค่าความต้านทานสมมูล R_n โดยการลดรูปวงจร ซึ่งเมื่อทำการลัดวงจรที่แหล่งจ่ายแรงดัน และเปิดวงจรที่แหล่งจ่ายกระแสจะได้ความตัวต้านทาน $4\,\Omega$ ขนานกับตัวต้านทาน $12\,\Omega$ ดังแสดงในรูป Ex5.10 (ค) และจะได้ความต้านทานสมมูล

$$R_n = \frac{4\times 12}{4+12} = 3\,\Omega$$



รูปที่ Ex5.10 (ข)-(ค)

รูปที่ Ex5.10 (ง) แสดง วงจรสมมูลนอร์ตันของตัวอย่างนี้

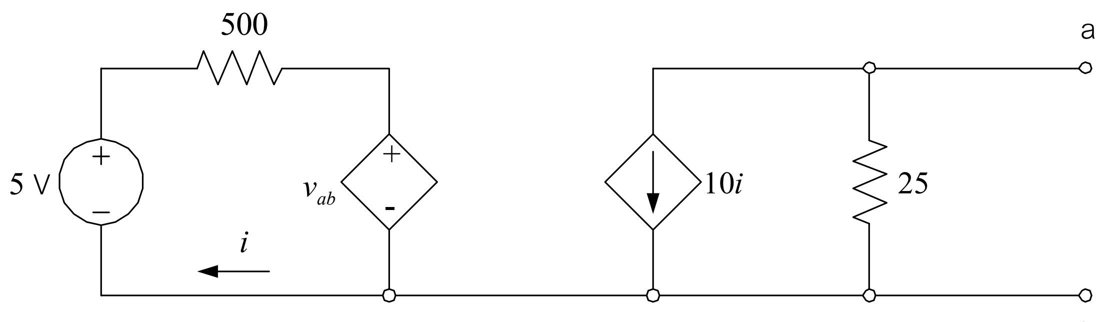


รูปที่ Ex5.10 (ง)

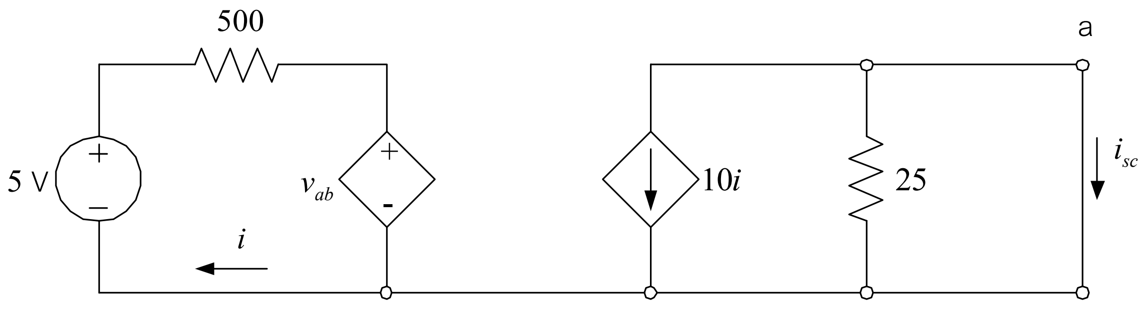
ตารางที่ 5.2 สรุปวิธีการหาวงจรสมมูลนอร์ตัน โดยแบ่งเป็นสามวิธีที่นิยมใช้กันมาก

วงจร	**วิธี**
1. ตัวต้านทานและแหล่งจ่ายอิสระ	• หาค่า i_{sc} • ทำให้แหล่งจ่ายทั้งหมดมีค่าเป็นศูนย์ หาค่า R_n โดยวิธีลดรูปวงจร
2. (ก) ตัวต้านทาน แหล่งจ่ายอิสระ และ แหล่งจ่ายขึ้นกับตัวแปรอื่น (ข) ตัวต้านทานและแหล่งจ่ายอิสระ	• หาค่า i_{sc} • เปิดวงจรขั้ว a - b หาค่าแรงดันเปิดวงจร v_{oc} • หาค่า R_t จาก $R_n = \frac{v_{oc}}{i_{sc}}$
3. ตัวต้านทานและแหล่งขึ้นกับตัวแปรอื่น	• ค่า i_{sc} จะเป็นศูนย์ • ต่อแหล่งจ่ายทดสอบที่ขั้ว a - b หากต่อ 1 V หาค่ากระแส i_a หากต่อ 1 A หาค่าแรงดัน v_{ab} • หาค่า R_n จาก $R_n = \frac{1\text{ V}}{i_a}$ หรือ $R_n = \frac{v_{ab}}{1\text{ A}}$ แล้วแต่กรณี

ตัวอย่าง 5.11 จงหาวงจรสมมูลนอร์ตันของวงจรด้านซ้ายมือของขั้ว a - b ในรูป Ex5.11 (ก)



(ก)



(ข)

รูปที่ Ex5.11

วิธีทำ หาค่ากระแสลัดวงจรโดยทำการปิดวงจรขั้ว a - b ดังในรูป Ex5.11 (ข) สังเกตว่า $v_{ab}=0$ ดังนั้น

$$i=\frac{5}{500}=10 \text{ mA}$$

ในส่วนขวามือของวงจร จะได้

$$i_{sc}=-10i=-100 \text{ mA}$$

ต่อมาหาค่าความต้านทานสมมูล โดยหาค่า $v_{oc}=v_{ab}$ เขียนสมการสำหรับเมชซ้ายมือได้

$$-5+500i+v_{ab}=0$$

และสำหรับเมชขวามือได้

$$v_{ab}=-25(10i)=-250i$$

ดังนั้น

$$i=\frac{-v_{ab}}{250}$$

แทนลงในสมการเมชสมการแรกได้

$$500\left(\frac{-v_{ab}}{250}\right)+v_{ab}=5$$

แก้สมการหาค่าแรงดัน

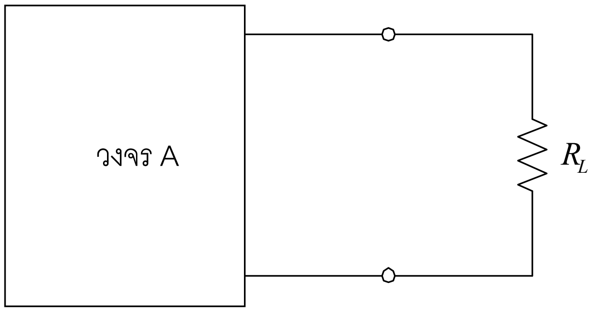
$$v_{ab}=-5 \text{ V}$$

และจะได้ค่าความต้านทานสมมูล

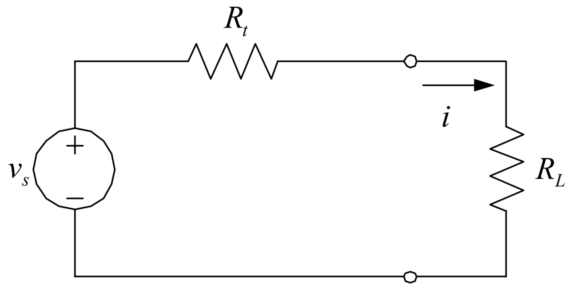
$$R_n=\frac{v_{ab}}{i_{sc}}=\frac{-5}{-0.1}=50\ \Omega$$

5.5 การส่งผ่านกำลังสูงสุด

ในวงจรสำหรับการประยุกต์ใช้งานจำนวนมากต้องการให้มีการส่งกำลังที่มีจากแหล่งจ่ายไปยังตัวต้านทานโหลด R_L ให้ได้ค่าสูงสุด พิจารณาวงจร A ในรูป 5.12 ซึ่งต่อเข้ากับตัวต้านทานโหลด R_L จากหัวข้อที่ 5.4 เราได้ศึกษาว่าเราสามารถแทนวงจร A ด้วยวงจรสมมูลเทวินินดังแสดงในรูปที่ 5.13



รูปที่ 5.12 วงจร A ต่อเข้ากับตัวต้านทานโหลด R_L



รูปที่ 5.13 แทนวงจร A ด้วยวงจรสมมูลเทวินินและต่อเข้ากับตัวต้านทานโหลด R_L

ปัญหาของการส่งกำลังสูงสุดสามารถอธิบายได้จากเรื่องของประสิทธิภาพ (Efficiency) และความมีประสิทธิผล (Effectiveness) ระบบสาธารณูปโภคไฟฟ้าจะถูกออกแบบให้ส่งผ่านกำลังไปยังโหลดด้วยประสิทธิภาพสูงสุดโดยการลดกำลังสูญเสียในระบบสายส่ง ดังนั้นจึงมุ่งไปที่การลดค่า R_t ซึ่งเป็นตัวแทนของความต้านทานของแหล่งจ่ายบวกกับความต้านทานของสายส่ง การใช้สายส่งที่มีค่าความต้านทานต่ำหรือไม่มีค่าความต้านทานเลยเช่นการใช้ตัวนำยิ่งยวด (Superconductor) จะเป็นสิ่งที่น่าสนใจสำหรับระบบไฟฟ้ากำลัง ส่วนสัญญาณในวงจรอิเล็กทรอนิกส์ หรือวงจรสื่อสาร ก็จะต้องการที่จะรักษากำลังสูงสุดที่โหลด เช่นกำลังที่สายอากาศ ของเครื่องวิทยุเอฟเอ็มที่อยู่ห่างจากสถานีส่งมากๆ ดังนั้นจึงเป็นหน้าที่ของวิศวกรที่จะออกแบบระบบเหล่านี้ให้ได้เงื่อนไขการส่งกำลังสูงสุด

พิจารณาวงจรในรูปที่ 5.13 เราต้องการหาค่าความต้านทาน R_L ที่จะทำให้มันได้รับกำลังสูงสุด โดยจะเริ่มจากการหาค่ากำลังที่ตัวต้านทานนี้ได้รับ

$$p = i^2 R_L$$

เนื่องจากกระแส

$$i = \frac{v_s}{R_L + R_t}$$

ดังนั้นค่ากำลังจะเป็น

$$p = \left(\frac{v_s}{R_L + R_t} \right)^2 R_L \qquad (5.7)$$

หากค่า v_s และ R_t เป็นค่าคงที่สำหรับแหล่งจ่ายที่พิจารณา ค่ากำลังสูงสุดจะเป็นฟังก์ชันกับ R_L เพื่อหาค่ากำลังสูงสุด ใช้แคลคูลัสในการหาค่าอนุพันธ์ของสมการ (5.7) เทียบกับ R_L

$$\frac{dp}{dR_L} = v_s^2 \frac{(R_t + R_L) - 2(R_t + R_L)R_L}{(R_L + R_t)^4}$$

ค่าอนุพันธ์จะเป็นศูนย์เมื่อ

$$(R_t + R_L) - 2(R_t + R_L)R_L = 0 \qquad (5.8)$$

หรือ

$$(R_t + R_L) + (R_t + R_L - 2R_L) = 0 \qquad (5.9)$$

แก้สมการ (5.9) จะได้

$$R_t = R_L \qquad (5.10)$$

ตรวจสอบการเป็นค่าสูงสุดโดยการหาอนุพันธ์อันดับที่สองว่ามีค่าน้อยกว่าศูนย์หรือไม่ ซึ่งในกรณีนี้จะได้ $\frac{d^2p}{dR_L^2} < 0$ ดังนั้นค่ากำลังสูงสุดจะถูกส่งไปยังโหลดเมื่อค่าความต้านทานโหลด R_L มีค่าเท่ากับค่าความต้านทานสมมูลเทวินิน R_t

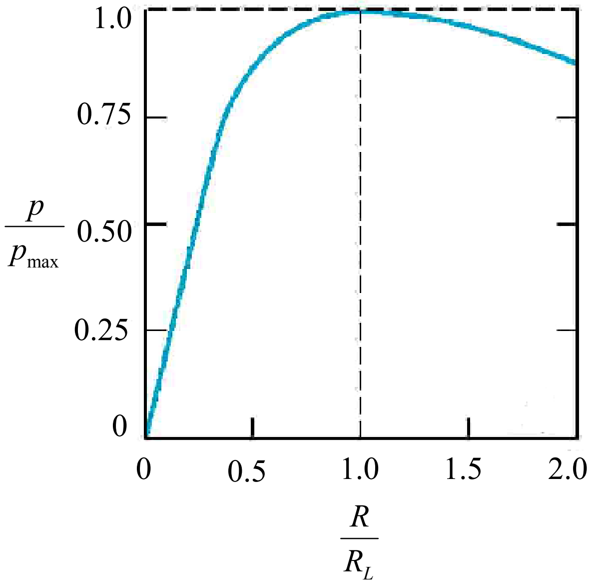
ค่ากำลังสูงสุดเมื่อ $R_L = R_t$ ได้จากการแทนค่า $R_L = R_t$ ลงในสมการ (5.7)

$$p_{\max} = \frac{v_s^2 R_L}{(2R_L)^2} = \frac{v_s^2}{4R_L} \qquad (5.11)$$

เมื่อค่าความต้านทานโหลดไม่เท่ากับค่าความต้านทานสมมูลเทวินิน กำลังที่โหลดได้รับจะลดลงดังแสดงในรูปที่ 5.14

ค่าประสิทธิภาพของการส่งกำลัง (Efficiency of Power Transfer) ถูกนิยามว่าเป็นอัตราส่วนของกำลังที่ส่งไปให้โหลด p_{in} ต่อกำลังที่จ่ายจากแหล่งจ่าย p_{out} ตามสมการ

$$\eta = \frac{p_{out}}{p_{in}} \qquad (5.12)$$



รูปที่ 5.14 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกำลังที่โหลดกับตัวต้านทานโหลด R_L

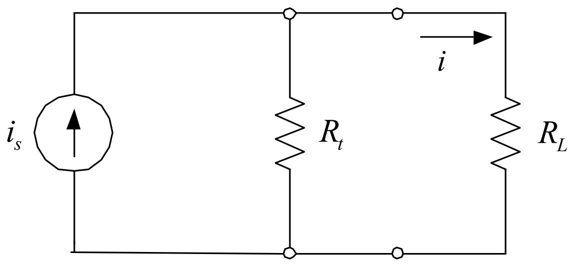
สำหรับการส่งกำลังสูงสุด เมื่อ $R_L = R_t$ เราได้

$$p_{in} = v_s i = v_s \left(\frac{v_s}{R_t + R_L} \right) = \frac{v_s^2}{R_L} \tag{5.13}$$

ค่ากำลังสูงสุดที่โหลดได้รับ คือ $p_{out} = p_{\max}$ ตามสมการ (5.11) ดังนั้นจะได้ค่าประสิทธิภาพของการส่งกำลัง

$$\eta = \frac{1}{2}$$

หรือ การส่งกำลังที่เงื่อนไขการส่งกำลังสูงสุดมีประสิทธิภาพ 50% บางวงจรอาจได้ประสิทธิภาพต่ำกว่านี้ที่เงื่อนไขการส่งกำลังสูงสุด



รูปที่ 5.15 แทนวงจร A ด้วยวงจรสมมูลนอร์ตันและต่อเข้ากับตัวต้านทานโหลด R_L

เราอาจใช้วงจรสมมูลนอร์ตันในการแทนวงจร A ดังแสดงในรูปที่ 5.15 ซึ่งความต้านทานโหลดจะขนานกับความต้านทานสมมูลนอร์ตัน ค่ากระแส i สามารถหาได้จากหลักการแบ่งกระแส คือ

$$i = \frac{R_t}{R_t + R_L} i_s$$

ดังนั้นค่ากำลัง

$$p = i^2 R_L = \frac{i_s^2 R_t^2 R_L}{(R_t + R_L)^2}$$

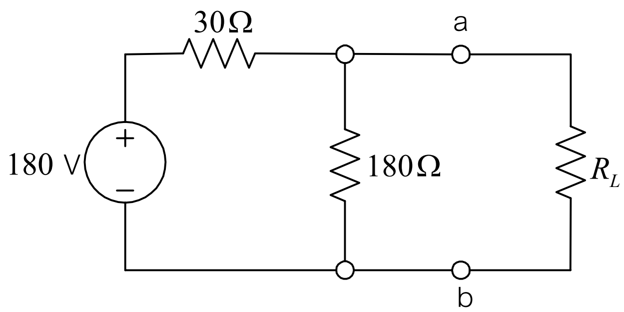
ใช้แคลคูลัสจะสามารถแสดงได้ว่าการส่งกำลังสูงสุดเกิดขึ้นเมื่อ

$$R_L = R_t$$

และค่ากำลังสูงสุดที่โหลดได้รับคือ

$$p_{\max} = \frac{R_L i_s^2}{4}$$

ตัวอย่าง 5.12 จงหาค่าความต้านทานโหลดที่จะทำให้โหลดในวงจรในรูป Ex5.12 (ก) ได้รับกำลังสูงสุด และจงหาค่ากำลังสูงสุดนั้น



รูปที่ Ex5.12 (ก)

วิธีทำ หาวงจรสมมูลเทวินินของวงจรด้านซ้ายมือของขั้ว a - b นี้ได้ดังนี้ ถอดตัวต้านทานโหลดออก หาค่าแรงดันสมมูลเทวินินได้

$$v_t = \frac{150}{180} \times 180 = 150 \text{ V}$$

และค่าความต้านทานสมมูลเทวินิน

$$R_t = \frac{30 \times 150}{30 + 150} = 25\,\Omega$$

เขียนวงจรสมมูลเทวินินแทนวงจรด้านซ้ายมือของขั้ว a - b ได้ดังรูป รูป Ex5.12 (ข) ค่าการส่งกำลังสูงสุดจะเกิดขึ้นเมื่อ $R_L = R_t = 25\,\Omega$

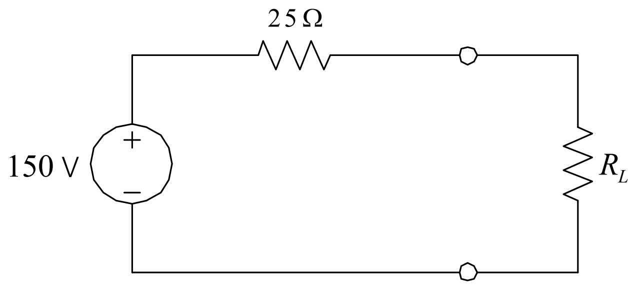
ค่ากำลังสูงสุดที่โหลดคำนวณได้จากสมการ (5.11)

$$p_{\max} = \frac{v_s^2}{4R_L} = \frac{(150)^2}{4 \times 25} = 225 \text{ W}$$

แหล่งจ่ายแรงดันสมมูลเทวินินจ่ายกำลังทั้งหมด

$$p_s = v_t i = 150 \times 3 = 450 \text{ W}$$

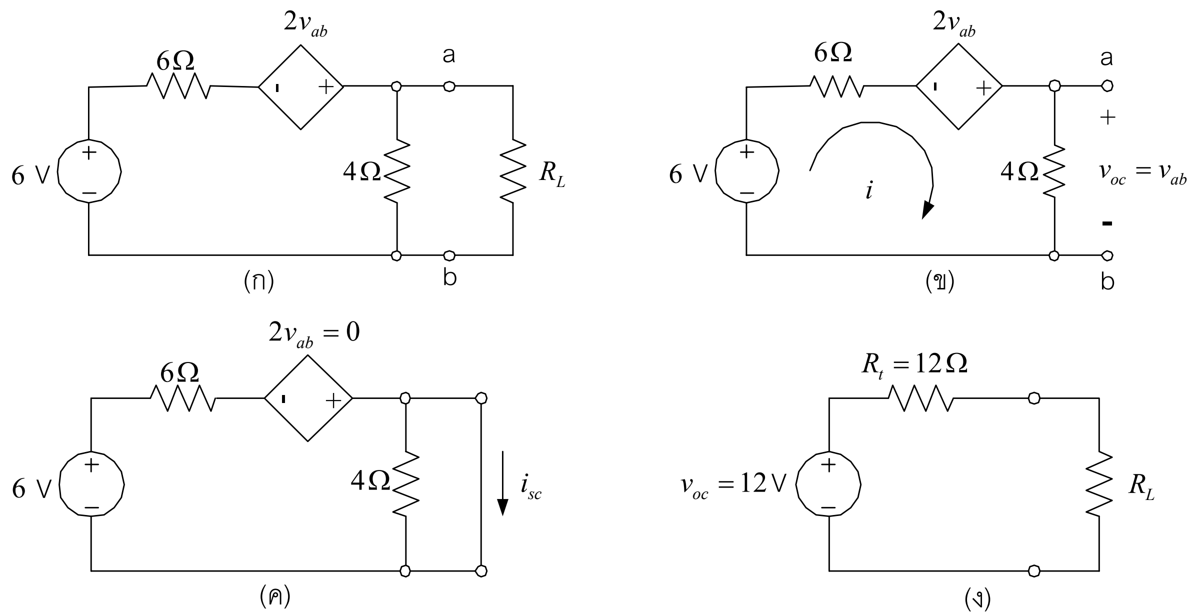
สังเกตว่ากำลังครึ่งหนึ่งสูญเสียไปกับความต้านทาน R_t



รูปที่ Ex5.12 (ข)

แหล่งจ่ายแรงดันในรูป Ex5.12 (ก) คือ 180 V ซึ่งจะจ่ายกำลัง $p = 180 i_1$ เมื่อ i_1 คือกระแสที่ไหลผ่านแหล่งจ่ายเมื่อความต้านทานโหลด $R_L = 25\,\Omega$ ซึ่งคำนวณได้ $i_1 = 3.5$ A ดังนั้น แหล่งจ่ายนี้จ่ายกำลัง 630 W ให้กับทั้งวงจร ค่าประสิทธิภาพการส่งกำลังจึงคำนวณได้ 35.7 %

ตัวอย่าง 5.13 จงหาค่าความต้านทานโหลดที่จะทำให้โหลดในวงจรในรูป Ex5.13 (ก) ได้รับกำลังสูงสุด และจงหาค่ากำลังสูงสุดนั้น



รูปที่ Ex5.13

วิธีทำ เราจะใช้วิธีที่สองในตาราง 5.1 ในการหาวงจรสมมูลเทวินิน โดยเริ่มจากการถอดตัวต้านทานโหลดแล้วหาค่า v_{oc} ดังแสดงในรูป Ex5.13 (ข) เขียน KVL

$$-6 + 10i - 2v_{ab} = 0$$

สังเกตว่า $v_{ab} = v_{oc} = 4i$ ดังนั้น

$$10i - 8i = 6$$

หรือ $i = 3$ A ซึ่งทำให้ $v_{oc} = 4i = 12$ V

เพื่อหาค่ากระแสลัดวงจร เราทำการปิดวงจรที่ขั้ว a - b ดังแสดงในรูป Ex5.13 (ค) เขียน KVL ได้

$$-6+6i_{sc}=0$$

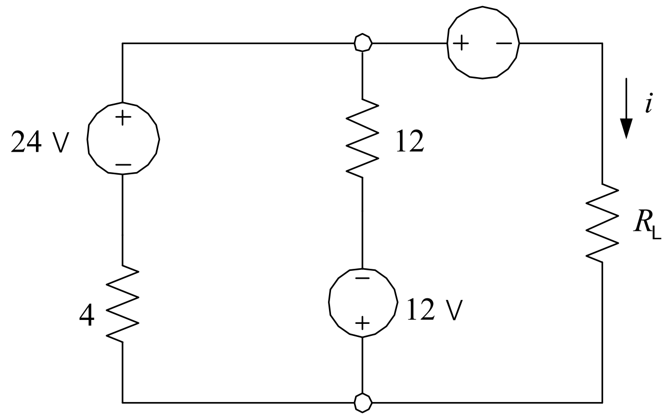
ดังนั้น $i_{sc}=1$ A และจะได้ค่าความต้านทานสมมูล $R_t=\dfrac{v_{oc}}{i_{sc}}=12\ \Omega$ เราได้วงจรสมมูลเทวินินดังวงจรในรูป Ex5.13 (ง)

ค่ากำลังสูงสุดที่โหลดเมื่อ $R_L=R_t=12\ \Omega$ คำนวณได้จากสมการ (5.11) ดังนี้

$$p_{\max}=\frac{v_{oc}^2}{4R_L}=\frac{(12)^2}{4\times 12}=3 \quad \text{W}$$

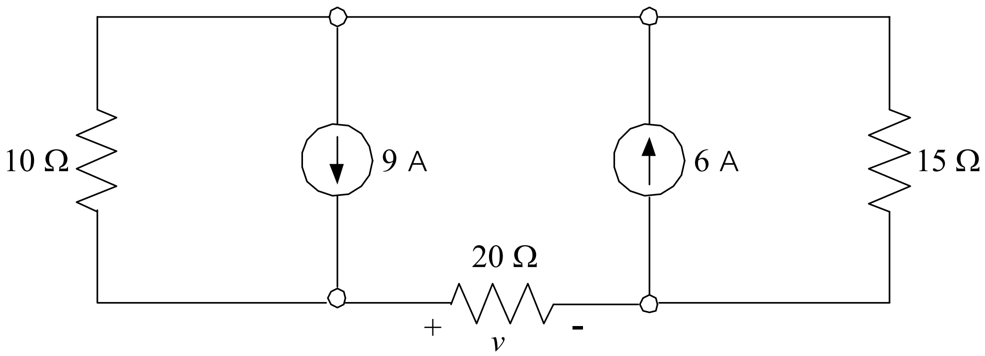
5.6 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. สำหรับวงจรในรูป P5.1 จงใช้การแปลงแหล่งจ่าย หาค่าความต้านทาน R_L ที่จะทำให้กระแส i มีค่า 2 mA



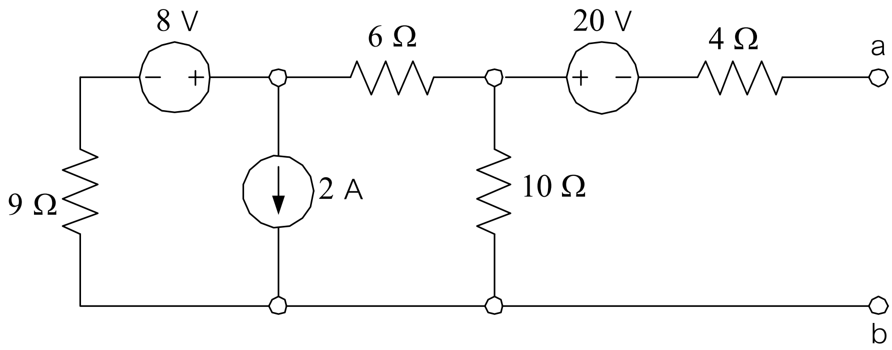
รูปที่ P5.1

2. พิจารณาวงจรในรูป P5.2 จงใช้ทฤษฎีซุปเปอร์โพสิชัน หาค่าแรงดัน v



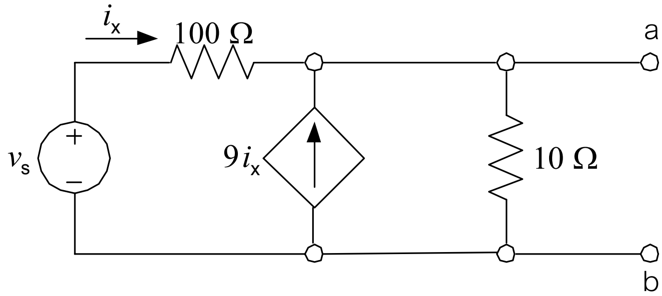
รูปที่ P5.2

3. จงหาวงจรสมมูลเทวินินของวงจรในรูป P5.3 ที่ขั้ว a – b



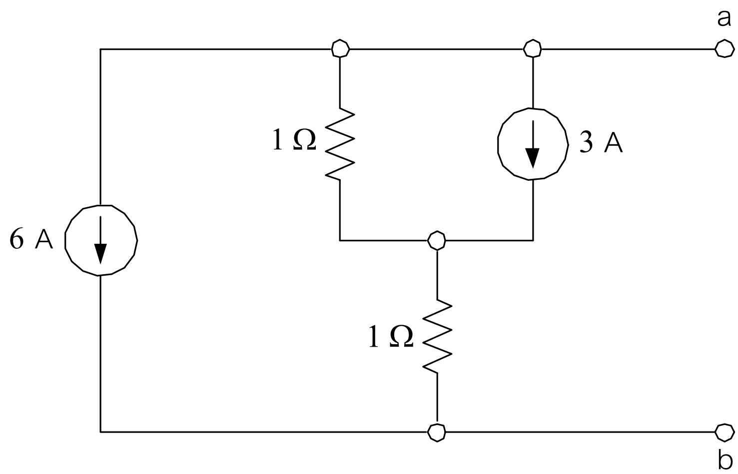
รูปที่ P5.3

4. จงหาวงจรสมมูลเทวินินของวงจรในรูป P5.4 ที่ขั้ว a – b



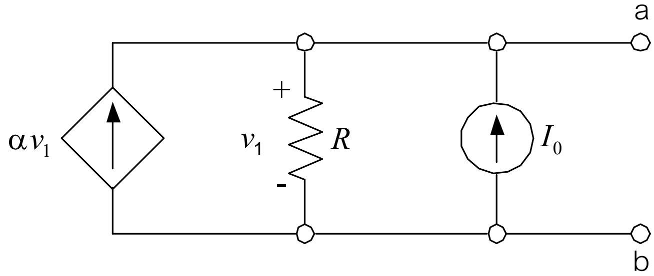
รูปที่ P5.4

5. จงหาวงจรสมมูลนอร์ตันของวงจรในรูป P5.5 ที่ขั้ว a – b



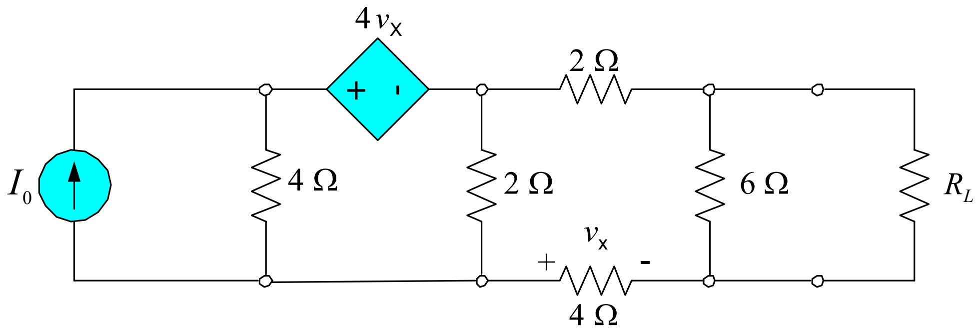
รูปที่ P5.5

6. จงหาวงจรสมมูลเทวินินและวงจรสมมูลนอร์ตันของวงจรในรูป P5.6 ในรูปของ α R และ I_0



รูปที่ P5.6

7. จากวงจรในรูป P5.7 (ก) จงหาค่าความต้านทาน R_L ที่จะได้รับกำลังสูงสุด และ (ข) ถ้าค่ากำลังสูงสุด $p_L = 54$ W จงหาค่า I_0



รูปที่ P5.7