บทที่ 7

ผลตอบสนองสมบูรณ์ของวงจรอันดับหนึ่ง

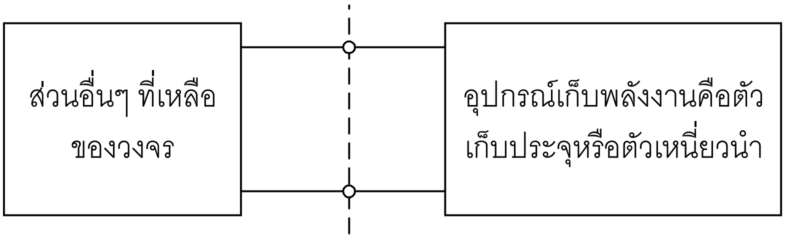
The Complete Response of a First-Order Circuit

ในบทที่แล้วได้ศึกษาคุณลักษณะของอุปกรณ์เก็บพลังงานสองตัวคือตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำ ในบทนี้จะได้กล่าวถึงผลตอบสนองของวงจรที่ประกอบด้วยตัวต้านทานและตัวเก็บประจุหรือตัวเหนี่ยวนำเพียงหนึ่งตัวเรียกว่าวงจรอันดับหนึ่ง (First-Order Circuit) เนื่องจากสมการที่ใช้อธิบายวงจรเหล่านี้จะเป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยเฉพาะในกรณีที่วงจรมีเฉพาะองค์ประกอบเชิงเส้นจะได้สมการอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear Differential Equation) ซึ่งจะแตกต่างจากในกรณีที่วงจรมีแต่ตัวต้านทาน ซึ่งจะได้สมการพีชคณิต ดังได้ศึกษาแล้วในบทที่ 4

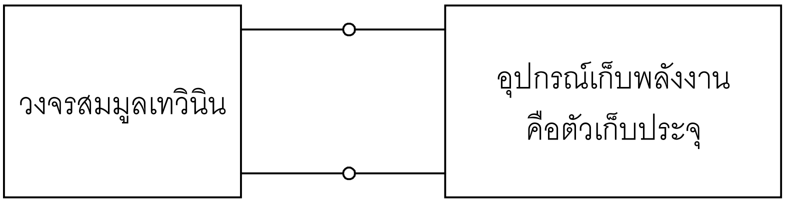
เทคนิคการวิเคราะห์วงจรทั้งสองแบบคือการวิเคราะห์โนดและการวิเคราะห์เมช ยังสามารถนำมาใช้ได้ แต่การหาคำตอบจะเป็นการหาคำตอบของสมการอนุพันธ์เชิงเส้น ซึ่งจะแบ่งเป็นสองส่วนคือคำตอบเอกพันธ์ (Homogeneous Solution) และคำตอบเฉพาะ (Particular Solution) คำตอบสมบูรณ์จะได้จากการหาผลรวมของคำตอบทั้งสอง

7.1 วงจรอันดับหนึ่ง

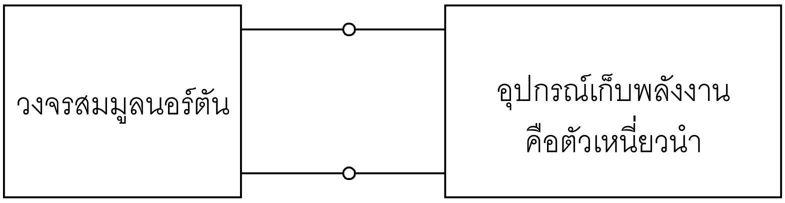
วงจรอันดับหนึ่งหมายถึงวงจรซึ่งประกอบด้วยองค์ประกอบวงจรอื่นๆ และตัวเก็บประจุเพียงหนึ่งตัวหรือตัวเหนี่ยวนำเพียงหนึ่งตัว เราจะใช้วงจรสมมูลเทวินินหรือวงจรสมมูลนอร์ตันช่วยในการวิเคราะห์วงจรอันดับหนึ่ง โดยการแบ่งวงจรออกเป็นสองส่วน ส่วนหนึ่งประกอบด้วยอุปกรณ์เก็บพลังงานคือตัวเก็บประจุหรือตัวเหนี่ยวนำ ส่วนที่สองจะเป็นส่วนอื่นๆ ที่เหลือของวงจร ดังแสดงแนวคิดในการแบ่งวงจรในรูปที่ 7.1 (ก) ขั้นตอนถัดมาคือการเขียนวงจรสมมูลสำหรับส่วนที่สองของวงจร ซึ่งจะขึ้นอยู่กับว่าอุปกรณ์เก็บพลังงานในวงจรส่วนที่หนึ่งเป็นตัวเหนี่ยวนำหรือตัวเก็บประจุ หากเป็นตัวเก็บประจุเราจะทำการหาวงจรสมมูลเทวินิน ดังแสดงในรูปที่ 7.1 (ข) และหากเป็นตัวเหนี่ยวนำเราจะหาวงจรสมมูลนอร์ตัน ดังแสดงในรูป 7.1 (ค) ผลการแทนวงจรสมมูลจะทำให้เราได้วงจรอันดับหนึ่งอย่างง่าย คือในกรณีเป็นตัวเก็บประจุ จะได้วงจรประกอบด้วยแหล่งจ่ายแรงดันสมมูลเทวินินอนุกรมกับความต้านทานสมมูลเทวินิน และอนุกรมกับตัวเก็บประจุ ส่วนในกรณีที่เป็นตัวเหนี่ยวนำจะได้วงจรประกอบด้วยแหล่งจ่ายกระแสสมมูลนอร์ตัน ขนานกับความต้านทานสมมูลนอร์ตัน และขนานกับตัวเหนี่ยวนำ



(ก)



(ข)



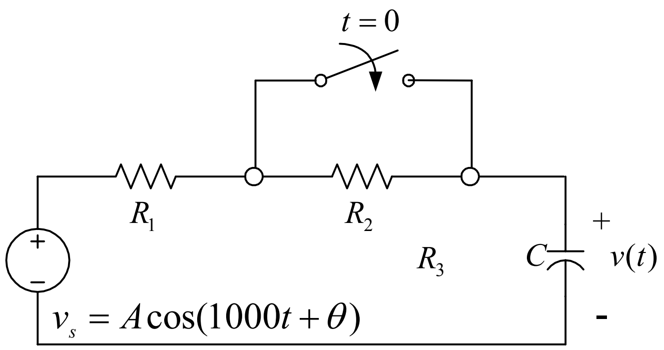
(ค)

รูปที่ 7.1 แนวคิดในการวิเคราะห์วงจรอันดับหนึ่ง (ก) การแบ่งวงจรออกเป็นสองส่วน
(ข) การเขียนวงจรสมมูลสำหรับส่วนที่เหลือของวงจร กรณีอุปกรณ์เก็บพลังงานคือตัวเก็บประจุ
(ค) การเขียนวงจรสมมูลสำหรับส่วนที่เหลือของวงจร กรณีอุปกรณ์เก็บพลังงานคือตัวเหนี่ยวนำ

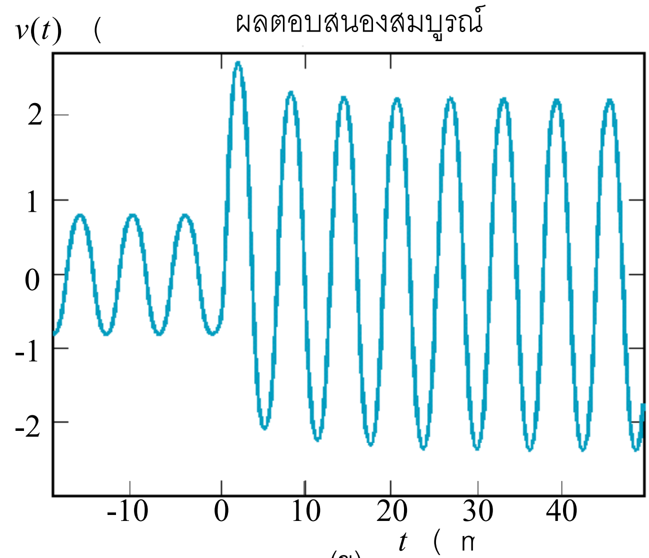
พิจารณาวงจรวงจรในรูปที่ 7.2 (ก) ฟังก์ชันกระตุ้นหรืออินพุทของวงจรนี้คือแรงดัน $v_s(t)$ ซึ่งในตัวอย่างนี้เป็นแหล่งจ่ายแบบไซนูซอยด์ เอาท์พุทหรือผลตอบสนองของวงจรคือแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ $v(t)$ วงจรนี้อยู่ในสภาวะคงตัวก่อนที่สวิทช์จะปิดที่เวลา $t = 0$ การเปลี่ยนตำแหน่งของสวิทช์จะส่งผลกระทบทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในวงจร ในที่สุดเมื่อเวลาผ่านไปผลกระทบนี้ก็จะหายไป วงจรจะกลับเข้าสู่สภาวะคงตัวอีกครั้ง ซึ่งค่าผลตอบสนองในสภาวะคงตัวเมื่อสวิทช์ปิดอาจแตกต่างกับเมื่อสวิทช์เปิด รูปที่ 7.2 (ข) แสดงกราฟการเปลี่ยนแปลงของแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุเทียบกับเวลา

เมื่ออินพุทเป็นแหล่งจ่ายแบบไซนูซอยด์เราคาดว่าผลตอบสนองของวงจรในสภาวะคงตัวก็จะเป็นไซนูซอยด์เช่นเดียวกัน และนอกจากนั้นสำหรับวงจรเชิงเส้นค่าความถี่ของผลตอบสนองจะต้องเท่ากับความถี่ของอินพุท วงจรนี้อยู่ในสภาวะคงตัวก่อนที่สวิทช์จะปิด ดังนั้นค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุที่สภาวะคงตัวคือ

$$v(t) = B\cos(1000t + \phi) \qquad t < 0 \tag{7.1}$$



(ก)



(ข)

รูปที่ 7.2 ตัวอย่างผลตอบสนองของวงจรอันดับหนึ่ง (ก) วงจรตัวอย่าง (ข) ผลตอบสนองสมบูรณ์

เมื่อสวิทช์ปิดที่เวลา $t=0$ ค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุที่ $t=0$ คือ

$$v(0) = B\cos(\phi) \tag{7.2}$$

หลังจากที่สวิทช์ปิดแล้ว ผลตอบสนองจะประกอบด้วยสองส่วน ส่วนแรกเรียกว่าผลตอบสนองชั่วขณะ (Transient Response) ซึ่งจะหายไปในที่สุด และส่วนที่สองเรียกว่าผลตอบสนองในสภาวะคงตัว (Steady State Response) ส่วนที่สองนี้จะเป็นไซนูซอยด์ที่มีความถี่เดียวกับอินพุทในวงจรอันดับหนึ่งส่วนชั่วขณะจะเป็นฟังก์ชันเอกโปเนนเทียล และในบทนี้เราจะพิจารณาวงจรอันดับหนึ่งเท่านั้นเพื่อใช้ผลประโยชน์จากการที่ผลตอบสนองของวงจรนี้อยู่ในรูปที่ง่ายในการทำความเข้าใจ ค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุหลังจากสวิทช์ปิดคือ

$$v(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + M\cos(1000t+\delta) \tag{7.3}$$

โดยที่ K คือค่าคงที่ขึ้นกับเงื่อนไขเริ่มต้นของวงจร สังเกตว่าพจน์แรก $Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ คือผลตอบสนองชั่วขณะ จะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไปจะมีค่าเป็นศูนย์ในที่สุด คงเหลือแต่พจน์ที่สอง $M\cos(1000t+\delta)$ ซึ่งก็คือผลตอบสนองในสภาวะคงตัวนั่นเอง สมการ (7.3) เป็นผลรวมของทั้งผลตอบสนองชั่วขณะและผลตอบสนองในสภาวะคงตัวเรียกว่าผลตอบสนองสมบูรณ์ (Complete Response) ของวงจร

คำว่าผลตอบสนองชั่วขณะในที่นี้จะหมายถึงส่วนหนึ่งของผลตอบสนองสมบูรณ์ แต่ในบางกรณีเช่นในโปรแกรมจำลองวงจร เวลาให้โปรแกรมทำการวิเคราะห์หาผลตอบสนองชั่วขณะของวงจร เราจะได้ค่าผลตอบสนองสมบูรณ์เป็นคำตอบ นั่นคือโปรแกรมเหล่านี้ใช้คำว่าผลตอบสนองชั่วขณะ แทนคำว่าผลตอบสนองสมบูรณ์นั่นเอง ดังนั้นจึงควรตรวจสอบว่าผลตอบสนองที่กำลังพิจารณานั้นประกอบด้วยส่วนใดบ้าง

การแบ่งผลตอบสนองสมบูรณ์ออกเป็นผลตอบสนองชั่วขณะและผลตอบสนองในสภาวะคงตัวเป็นการแบ่งโดยจะเน้นให้เห็นถึงลักษณะของผลตอบสนองว่ามีส่วนที่ปรากฏชั่วขณะ ในที่สุดจะหมดไปและมีส่วนที่จะคงอยู่ตลอดเวลา ตราบใดที่ป้อนอินพุท เนื่องจากสมการที่ใช้อธิบายวงจรอันดับหนึ่งคือสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในการแก้สมการหาคำตอบของสมการเหล่านี้ เรานิยมแบ่งการแก้สมการออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกจะทำการกำหนดให้การกระตุ้นหรืออินพุทเป็นศูนย์ เรียกว่าสมการเอกพันธ์ (Homogeneous Equation) คำตอบที่ได้จากการแก้สมการส่วนนี้เรียกว่า คำตอบเอกพันธ์ และส่วนที่สอง จะกำหนดฟังก์ชันกระตุ้นหรืออินพุท เรียกว่า สมการเฉพาะ คำตอบที่ได้เรียกว่าคำตอบเฉพาะ (Particular Solution) คำตอบสมบูรณ์ (Complete Solution) จะได้จากการรวมคำตอบ ทั้งสองส่วนเข้าด้วยกัน

ในทางการวิเคราะห์วงจรเรานิยมที่จะเรียกชื่อให้สื่อกับสิ่งที่เกิดขึ้นในวงจรจริงมากกว่าการใช้ศัพท์ทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นเราจะเทียบคำตอบเอกพันธ์เป็นผลตอบสนองธรรมชาติ (Natural Response) ซึ่งหมายถึงผลตอบสนองที่มาจากพลังงานที่เก็บสะสมอยู่ในวงจร ไม่ใช่จากอินพุท ค่าผลตอบสนองนี้จะขึ้นกับค่าแรงดันเริ่มต้นของตัวเก็บประจุหรือค่ากระแสเริ่มต้นของตัวเหนี่ยวนำ และเทียบคำตอบเฉพาะกับผลตอบสนองกระตุ้น (Forced Response) ซึ่งหมายถึงผลตอบสนองเนื่องจากอินพุท และคำตอบสมบูรณ์ก็คือผลตอบสนองสมบูรณ์นั่นเอง การแบ่งแบบนี้จะเน้นให้เห็นถึงที่มาของผลตอบสนองว่าเกิดจากอะไร

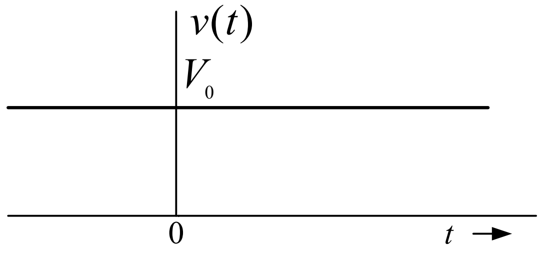
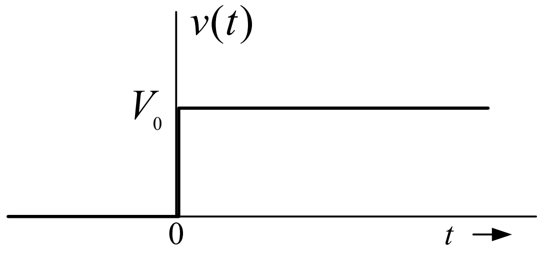
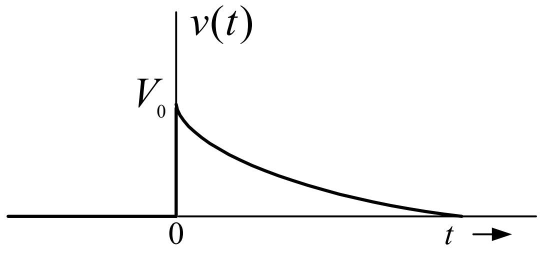
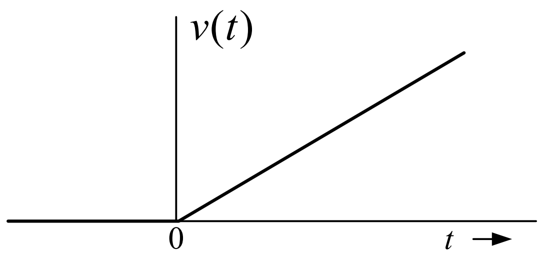
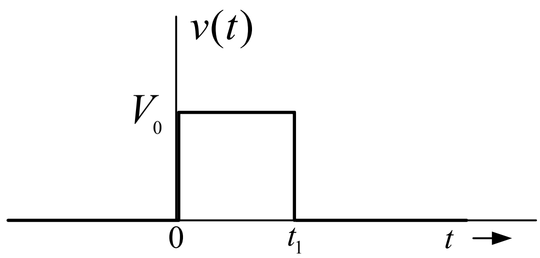
เราจะใช้ทั้งสามวิธีในการแบ่งผลตอบสนองสมบูรณ์สลับกัน โดยจะขึ้นอยู่กับว่าเรากำลังสนใจสิ่งใด โดยจะถือว่า ผลตอบสนองชั่วขณะเกิดจากพลังงานที่สะสมในวงจร หาได้จากการแก้สมการเอกพันธ์ จะปรากฏแค่ชั่วระยะเวลาหนึ่งเท่านั้น ส่วนผลตอบสนองในสภาวะคงตัวเกิดจากอินพุท จะมีลักษณะเช่นเดียวกับอินพุท หาได้จากการแก้สมการเฉพาะ และจะปรากฏตัวตลอดเวลาที่ใส่อินพุท

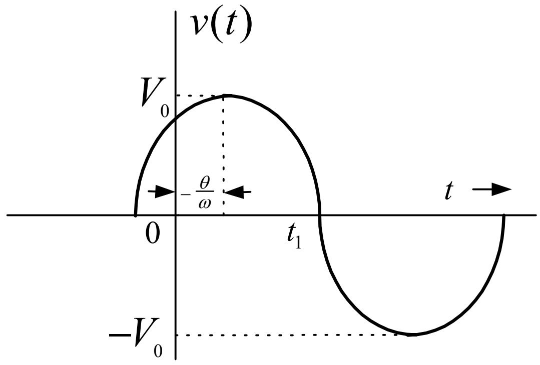
7.2 ผลตอบสนองต่ออินพุทคงที่

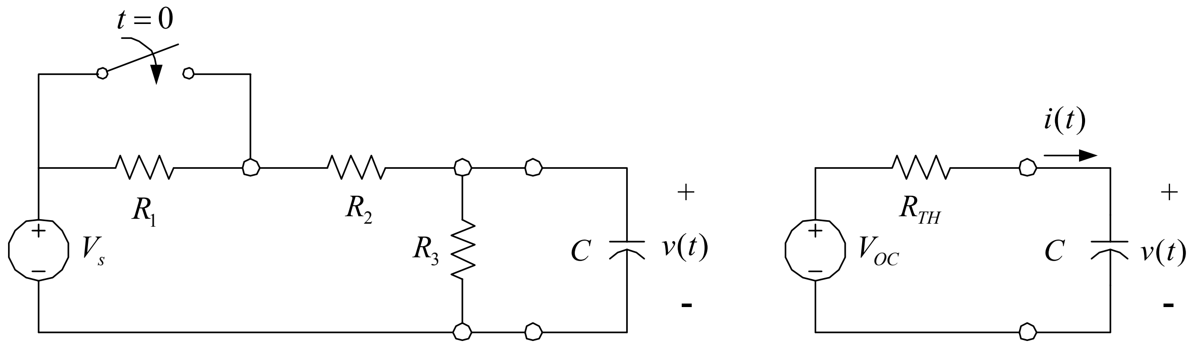
ในโลกนี้มีแหล่งกำเนิดสัญญาณไฟฟ้ามากมาย ทั้งที่มีอยู่ในธรรมชาติ และที่มนุษย์สร้างขึ้น โดยทั่วไป เราใช้วงจรไฟฟ้าทำการประมวลสัญญาณเหล่านี้เพื่อให้ได้เอาท์พุทหรือผลตอบสนองตามที่ต้องการ ดัง

นั้นสัญญาณอินพุทของวงจรใดๆ จึงมีหลายรูปแบบ ในการศึกษาในวิชานี้จะพิจารณาเฉพาะสัญญาณที่มีลักษณะเป็นฟังก์ชันค่าจริง (Real-Value Function) กับเวลา หมายถึงที่เวลาใดๆ ค่าของฟังก์ชันเป็นตัวเลขจำนวนจริง ตาราง 7.1 แสดงตัวอย่างของสัญญาณที่เกี่ยวข้องและใช้มากในทางวิศวกรรมไฟฟ้า

ตาราง 7.1 ตัวอย่างของสัญญาณที่ใช้ในทางวิศวกรรมไฟฟ้า

ชื่อสัญญาณ	**สมการ**	**รูปคลื่น**
1.สัญญาณคงที่ หรือสัญญาณกระแสตรง	$v(t) = V_0$	
2.สัญญาณสเตป	$v(t) = 0 \quad t < 0$ $= V_0 \quad t > 0$	
3.สัญญาณเอกโปเนนเทียล	$v(t) = 0 \quad t < 0$ $= V_0 e^{-at} \quad t > 0$	
4.สัญญาณแรมป์	$v(t) = 0 \quad t < 0$ $= kt \quad t \geq 0$	
5.สัญญาณพัลส์	$v(t) = V_0 \quad 0 \leq t \leq t_1$ $= 0$ ที่เวลาอื่นๆ	

ชื่อสัญญาณ	สมการ	รูปคลื่น
6.สัญญาณไซนูซอยด์	$v(t)=V_0\sin(\omega t+\theta)$	



(ก) (ข)

รูปที่ 7.3 การตอบสนองสมบูรณ์ของวงจร RC ต่อสัญญาณอินพุทคงที่

(ก) วงจรอันดับหนึ่งซึ่งประกอบด้วยตัวเก็บประจุ

(ข) หลังจากสวิทซ์ปิด และแทนวงจรส่วนที่เหลือด้วยวงจรสมมูลเทวินิน

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาการตอบสนองสมบูรณ์ของวงจรอันดับหนึ่งต่อสัญญาณอินพุทคงที่ หรือที่นิยมเรียกว่าสัญญาณกระแสตรง (DC Signal) รูปที่ 7.3 (ก) แสดงวงจร RC ที่มีสัญญาณกระตุ้นหรืออินพุทเป็นแหล่งจ่ายแรงดันกระแสตรง V_s เราต้องการหาค่าผลตอบสนองของวงจรนี้หลังจากเวลาที่วงจรถูกกระทบโดยการเปลี่ยนตำแหน่งของสวิทซ์ t_0 ค่าหนึ่ง ในตัวอย่างนี้ค่าเวลา $t_0=0$ การปิดสวิทซ์ทำให้ตัวต้านทาน R_1 ถูกลัดวงจรหรือไม่มีผลต่อวงจรอีกต่อไป หลังจากสวิทซ์ปิดเราเขียนวงจรสมมูลได้ดังแสดงในรูปที่ 7.3 (ข) ซึ่งเราแยกตัวเก็บประจุออกจากส่วนที่เหลือของวงจร และแทนส่วนที่เหลือนั้นด้วยวงจรสมมูลเทวินิน ซึ่งมีค่า

$$V_{oc}=\frac{R_3}{R_2+R_3}V_s=V_t$$

และ

$$R_t=\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$$

เขียนสมการอนุพันธ์สำหรับวงจรในรูปที่ 7.3 (ข) ค่ากระแสของตัวเก็บประจุคือ

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v(t)$$

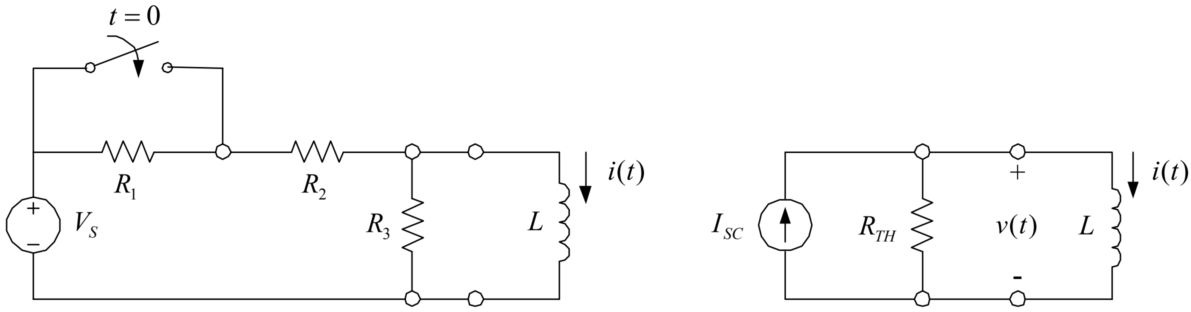
กระแสค่าเดียวกันนี้ไหลผ่านตัวต้านทาน R_t ดังนั้น

$$V_{oc} = R_t i(t) + v(t) = R_t\left(C\frac{d}{dt}v(t)\right) + v(t)$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dt}v(t) + \frac{v(t)}{R_t C} = \frac{V_{oc}}{R_t C} \tag{7.4}$$

สมการ (7.4) คือสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เนื่องจากอนุพันธ์อันดับสูงสุดในสมการนี้คืออันดับหนึ่ง



(ก) (ข)

รูปที่ 7.4 การตอบสนองสมบูรณ์ของวงจร RL ต่อสัญญาณอินพุทคงที่

(ก) วงจรอันดับหนึ่งซึ่งประกอบด้วยตัวเหนี่ยวนำ

(ข) หลังจากสวิทช์ปิด และแทนวงจรส่วนที่เหลือด้วยวงจรสมมูลนอร์ตัน

พิจารณาวงจร RL ในรูปที่ 7.4 (ก) วงจรนี้อยู่ในสภาวะคงตัวนานก่อนที่สวิทช์จะปิดที่เวลา $t = 0$ ส่งผลกระทบต่อวงจร เมื่อสวิทช์ปิด เราสามารถเขียนวงจรสมมูลได้ดังในรูปที่ 7.4 (ข) ส่วนต่างๆ ทั้งหมดขององวงจรยกเว้นตัวเหนี่ยวนำจะแทนด้วยวงจรสมมูลนอร์ตัน เราจะได้ค่า

$$I_{sc} = \frac{V_s}{R_2} = I_n$$

และ

$$R_t = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

เขียนสมการอนุพันธ์สำหรับวงจรในรูปที่ 7.4 (ข) ค่าแรงดันของตัวเหนี่ยวนำคือ

$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$$

ค่าแรงดัน $v(t)$ ตกคร่อมตัวต้านทานด้วยดังนั้น ใช้ KCL ที่โนดบนในรูป 7.4 (ข) จะได้

$$I_{sc} = \frac{v(t)}{R_t} + i(t) = \left(\frac{L\frac{d}{dt}i(t)}{R_t} \right) + i(t)$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{d}{dt}i(t) + \frac{R_t}{L}v(t) = \frac{R_t}{L}I_{sc} \qquad (7.5)$$

สมการนี้ก็เป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งเช่นกัน

สมการ (7.4) และ (7.5) มีรูปแบบเดียวกัน คือ

$$\frac{d}{dt}x(t) + \frac{x(t)}{\tau} = K \qquad (7.6)$$

เราเรียกค่า τ ว่าค่าคงที่เวลา (Time Constant) เราจะแก้สมการอนุพันธ์ในสมการ (7.6) โดยวิธีแยกตัวแปรแล้วอินตริเกรท จากนั้นจะได้นำผลคำตอบที่ได้ไปใช้กับตัวอย่างข้างต้นทั้งสอง เราอาจเขียนสมการ (7.6) ใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{K\tau - x}{\tau}$$

ทำการแยกตัวแปรได้

$$\frac{dx}{x - K\tau} = -\frac{dt}{\tau}$$

เขียนอินตริกรัลแบบไม่จำกัดขอบเขตทั้งสองข้าง จะได้

$$\int \frac{dx}{x - K\tau} = -\frac{1}{\tau}\int dt + C$$

เมื่อ C คือค่าคงที่ของการอินตริเกรท ทำการอินตริเกรทได้

$$\ln(x - K\tau) = -\frac{t}{\tau} + C$$

แก้สมการหาค่า x

$$x(t) = K\tau + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

เมื่อ $A = e^C$ ซึ่งหาได้จากค่าเริ่มต้นของวงจร $x(0)$ เพื่อหาค่า A แทนค่าเวลา $t = 0$ ในสมการคำตอบ

$$x(0) = K\tau + Ae^{-\frac{0}{\tau}} = K\tau + A$$

หรือ

$$A = x(0) - K\tau$$

แทนค่า A เราจะได้

$$x(t) = K\tau + \left[x(0) - K\tau\right]e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7.7}$$

เนื่องจาก

$$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = K\tau$$

เขียนสมการ (7.7) ใหม่ได้

$$x(t) = x(\infty) + \left[x(0) - x(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7.8}$$

การหาค่าอนุพันธ์ของ $x(t)$ จะทำให้สามารถหาค่าคงที่เวลาได้

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\tau}\left[x(0) - x(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ให้ $t = 0$ ได้

$$\left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}\left[x(0) - x(\infty)\right]$$

หรือ

$$\tau = \frac{x(\infty) - x(0)}{\left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0}} \tag{7.9}$$

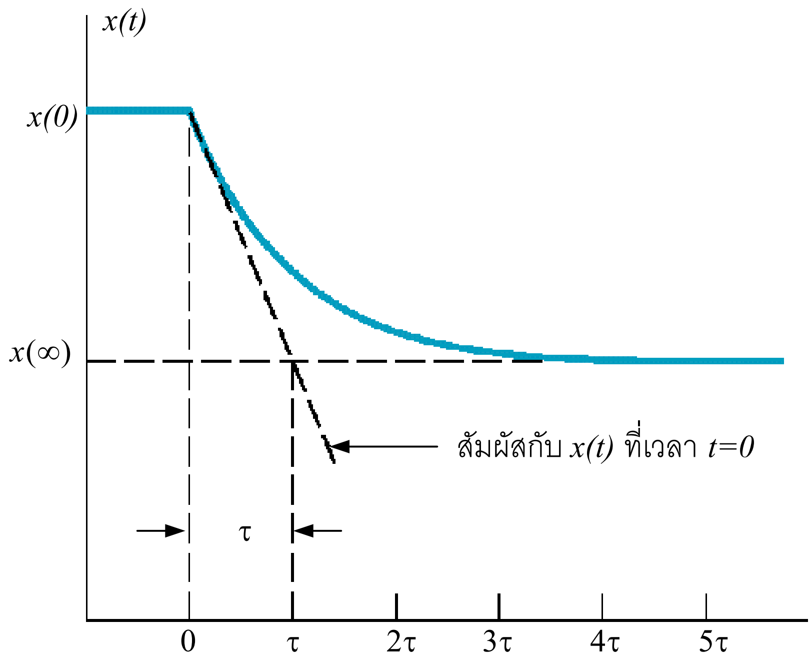
รูปที่ 7.5 แสดงกราฟของ $x(t)$ กับเวลา t ซึ่งเราสามารถหาค่าต่อไปนี้ได้

1. ค่าความชันของกราฟที่เวลา $t = 0$
2. ค่าเริ่มต้นของตัวแปร $x(t)$
3. ค่าสุดท้ายของตัวแปร $x(t)$

สมการ (7.9) สามารถนำมาใช้ในการหาค่าคงที่เวลา จากค่าที่ได้จากกราฟเหล่านี้ ดังแสดงในรูปที่ 7.5

เรานำผลที่ได้มาหาคำตอบของวงจร RC ในรูปที่ 7.3 โดยเทียบสมการ (7.4) กับสมการ (7.6) จะได้

$$x(t) = v(t) \quad \tau = R_tC \text{ และ } K = \frac{V_{oc}}{R_tC}$$



รูปที่ 7.5 กราฟความสัมพันธ์ของ $x(t)$ กับเวลา t

แทนลงในสมการ (7.7) จะได้

$$v(t) = V_{oc} + \left[v(0) - V_{oc}\right]e^{-\frac{t}{R_t C}} \tag{7.10}$$

พจน์ที่สองของด้านขวามือในสมการ (7.10) จะลดลงเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นและจะหายไปในที่สุด ดังนั้นส่วนนี้คือผลตอบสนองชั่วขณะหรือผลตอบสนองธรรมชาตินั่นเอง แทนค่าเวลา $t = 0$ ในสมการที่ (7.10) จะได้ $v(0) = v(0)$ ตามที่คาดไว้ เมื่อเวลาเท่ากับห้าเท่าของค่าคงที่เวลา $t = 5\tau$ จะได้ค่าแรงดัน

$$v(5\tau) = V_{oc} + \left[v(0) - V_{oc}\right]e^{-5} = 0.9933V_{oc} + 0.0067v(0) \approx V_{oc}$$

ส่วนนี้จะเป็นผลตอบสนองในสภาวะคงตัวหรือผลตอบสนองกระตุ้น จะเห็นว่าเมื่อกระตุ้นวงจรด้วยสัญญาณคงที่จะได้ผลตอบสนองในสภาวะคงตัวเป็นค่าคงที่เช่นกัน ผลรวมของผลตอบสนองธรรมชาติ $\left[v(0) - V_{oc}\right]e^{-\frac{t}{R_t C}}$ และผลตอบสนองกระตุ้น V_{oc} คือผลตอบสนองสมบูรณ์ $v(t)$

พิจารณาวงจร RL ในรูปที่ 7.4 เทียบสมการ (7.5) และ (7.6) ได้

$$x(t) = i(t) \quad \tau = \frac{L}{R_t} \text{ และ } K = \frac{L}{R_t} I_{sc}$$

แทนลงในสมการ (7.7) จะได้

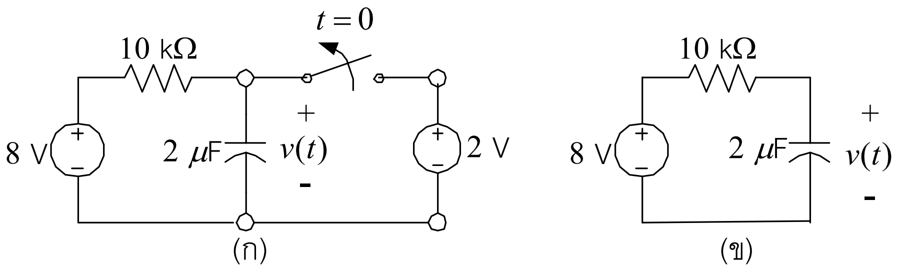
$$i(t) = I_{sc} + \left[i(0) - I_{sc}\right]e^{-\frac{R_t}{L}t} \tag{7.11}$$

ในทำนองเดียวกัน เราพบว่า ผลรวมของผลตอบสนองธรรมชาติ $\left[i(0)-I_{sc}\right]e^{-\frac{R_t}{L}t}$ และผลตอบสนองกระตุ้น I_{sc} คือผลตอบสนองสมบูรณ์ $i(t)$

ตัวอย่าง 7.1 จงหาค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุหลังจากสวิทช์เปิดวงจรในวงจรแสดงในรูป Ex 7.1 (ก) และหาค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุที่เวลา $50\,\text{ms}$ หลังจากสวิทช์เปิดวงจร

วิธีทำ แรงดันจากแหล่งจ่ายแรงดัน 2 V จะทำการประจุตัวเก็บประจุจนกระทั่งมีค่าแรงดัน 2 V และเมื่อสวิทช์เปิดวงจร จะเกิดผลกระทบต่อวงจร แต่เนื่องจากค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุไม่สามารถเปลี่ยนแปลงทันทีทันใด แรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุจะยังคงมีค่า 2 V ที่ชั่วขณะเวลาที่ สวิทช์เปิดวงจร ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นของวงจรคือ

$$v(0)=2\text{ V}$$



รูปที่ Ex7.1 (ก) - (ข)

รูปที่ Ex7.1 (ข) แสดงวงจรนี้หลังจากสวิทช์เปิดวงจร เทียบวงจรนี้กับวงจรในรูปที่ 7.3 (ข) จะได้

$$R_t=10\,\text{k}\Omega \text{ และ } V_{oc}=8\text{ V}$$

ค่าคงที่เวลาของวงจรนี้คือ

$$\tau=R_tC=(10\times10^3)(2\times10^{-6})=20\ \text{ms}$$

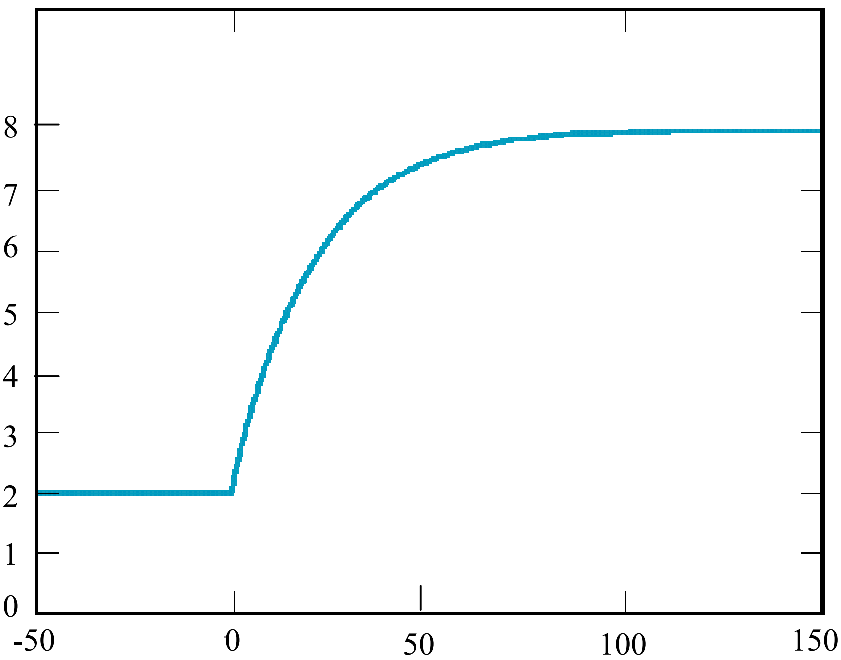
แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ 7.10 ได้

$$v(t)=8-6e^{-\frac{t}{20}}\text{ V}$$

เมื่อเวลา t มีหน่วยเป็น ms ที่เวลา $t=50\,\text{m}$ จะได้

$$v(t)=8-6e^{-\frac{50}{20}}=7.51\text{ V}$$

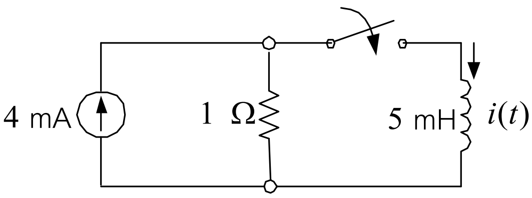
รูปที่ Ex7.1 (ค) แสดงกราฟแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุเทียบกับเวลา



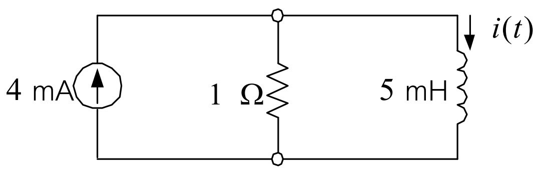
(ค)

รูปที่ Ex7.1 (ค)

ตัวอย่าง 7.2 จงหาค่ากระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำหลังจากสวิทช์ปิดวงจรในวงจรแสดงในรูป Ex 7.2 (ก) และหาว่าจะต้องใช้เวลาเท่าใด หลังจากสวิทช์ปิดวงจรกระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำจึงจะมีค่า 2 mA



(ก)



(ข)

รูปที่ Ex7.2 (ก) - (ข)

วิธีทำ ค่ากระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำจะมีค่าเป็นศูนย์จนกระทั่งสวิทช์ปิดวงจร เนื่องจากกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนียวนำไม่สามารถเปลี่ยนแปลงทันทีทันใดได้ ดังนั้น มันจะยังคงมีค่าศูนย์ ในชั่วขณะเวลาที่สวิทช์ปิด นั่นคือค่าเริ่มต้นของวงจรคือ

$$i(0) = 0$$

รูป Ex 7.2 (ข) แสดงวงจรเมื่อสวิทช์ปิดวงจรแล้ว เทียบวงจรนี้กับวงจรในรูปที่ 7.4 จะได้

$$R_t = 1\,\mathrm{k}\Omega \text{ และ } I_{sc} = 4\,\mathrm{mA}$$

ค่าคงที่เวลาของวงจรนี้คือ

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{5\times10^{-3}}{1\times10^{3}} = 5\ \mu\text{s}$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ 7.11 ได้

$$i(t) = 4 - 4e^{-\frac{t}{5}}\ \text{mA}$$

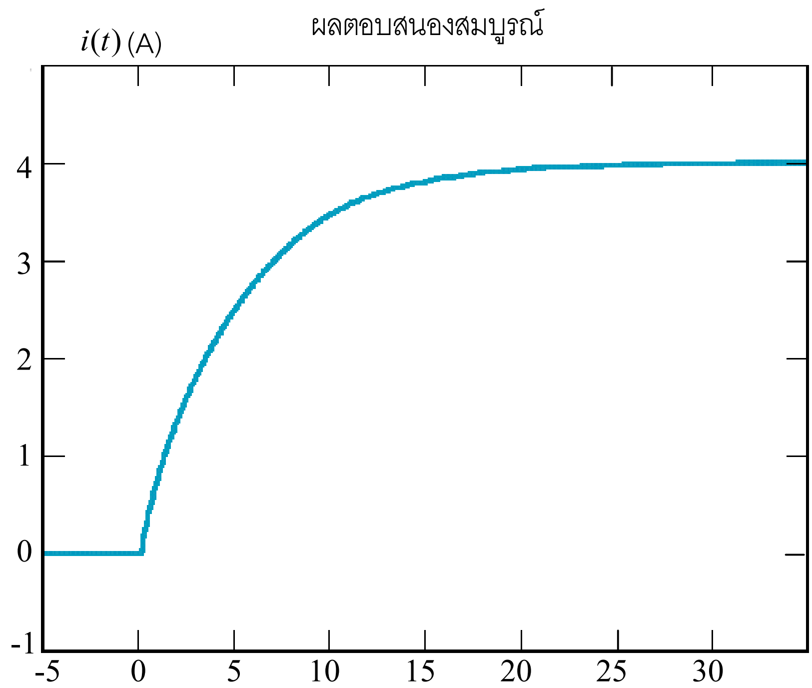
เมื่อเวลา t มีหน่วยเป็น μs เพื่อหาค่าเวลาที่ใช้ในการมีค่ากระแส $i =$ 2 mA แทนค่ากระแสที่เวลานี้

$$i(t) = 2 = 4 - 4e^{-\frac{t}{5}}$$

แก้สมการหาค่าเวลา t จะได้

$$t = -5\times\ln\left(\frac{2-4}{-4}\right) = 3.47\ \mu\text{s}$$

รูปที่ Ex7.2 (ค) แสดงกราฟกระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำเทียบกับเวลา



(ค)

รูปที่ Ex7.2 (ค)

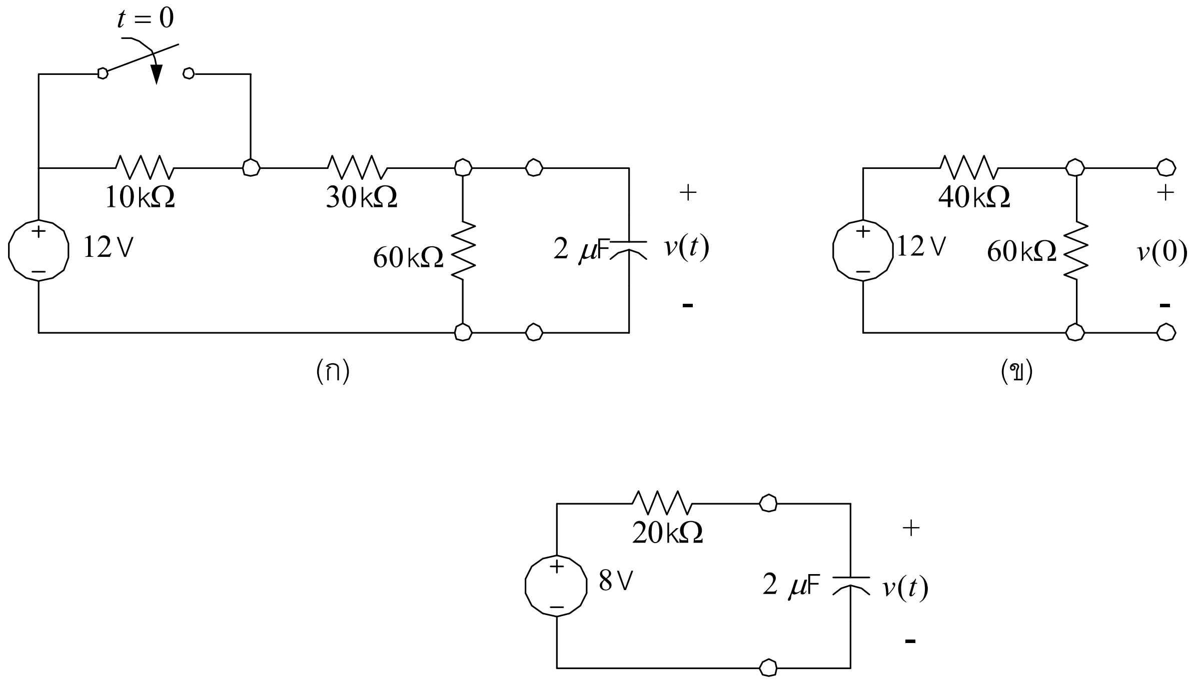
ตัวอย่าง 7.3 สวิทช์ในวงจรในรูป Ex 7.3 (ก) เปิดวงจรอยู่เป็นเวลานานมากก่อนที่จะปิดวงจรที่เวลา $t = 0$ ms จงหาค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุหลังจากสวิทช์ปิดวงจร

วิธีทำ เนื่องจากสวิทช์ในวงจรเปิดวงจรอยู่เป็นเวลานานมากดังนั้นวงจรจะอยู่ในสภาวะคงตัว กระแสและแรงดันในวงจรทุกค่าจะเป็นค่าคงที่ กระแสไหลผ่านตัวเก็บประจุมีค่า

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v(t) = 0$$

หรือตัวเก็บประจุปรากฏตัวเหมือนเปิดวงจร เมื่อแหล่งจ่ายเป็นค่าคงที่และวงจรอยู่ในสภาวะคงตัว รูป Ex 7.3 (ข) แสดงวงจรเมื่อสวิทช์เปิดวงจร เรารวมตัวต้านทาน 10 kΩ และ 30 kΩ ซึ่งต่ออนุกรมกันเข้าด้วยกันเป็นตัวต้านทาน 40 kΩ อินพุทหรือสัญญาณกระตุ้นของวงจรคือแรงดันคงที่ 12 V และเมื่อวงจรอยู่ในสภาวะคงตัว ตัวเก็บประจุปรากฏตัวเหมือนเปิดวงจร จะได้ค่าเริ่มต้นของวงจร คือแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุที่เวลา $t = 0$ ms จากการแบ่งแรงดันคือ

$$v(0) = \frac{60 \times 10^3}{(40 \times 10^3) + (60 \times 10^3)} 12 = 7.2 \text{ V}$$



(ก) (ข)

(ค)

รูปที่ Ex7.3

รูป Ex 7.3 (ค) แสดงวงจรเมื่อสวิทช์ปิดวงจร ซึ่งจะทำให้ตัวต้านทาน 10 kΩ ถูกลัดวงจร หรือไม่มีผลต่อวงจร หาวงจรสมมูลเทวินินของส่วนอื่นๆของวงจรยกเว้นตัวเก็บประจุ โดยที่

$$V_{oc} = \frac{60 \times 10^3}{(30 \times 10^3) + (60 \times 10^3)} 12 = 8 \text{ V}$$

และ

$$R_t = \frac{(30 \times 10^3) \times (60 \times 10^3)}{(30 \times 10^3) + (60 \times 10^3)} = 20 \text{ k}\Omega$$

ค่าคงที่เวลาของวงจรนี้คือ

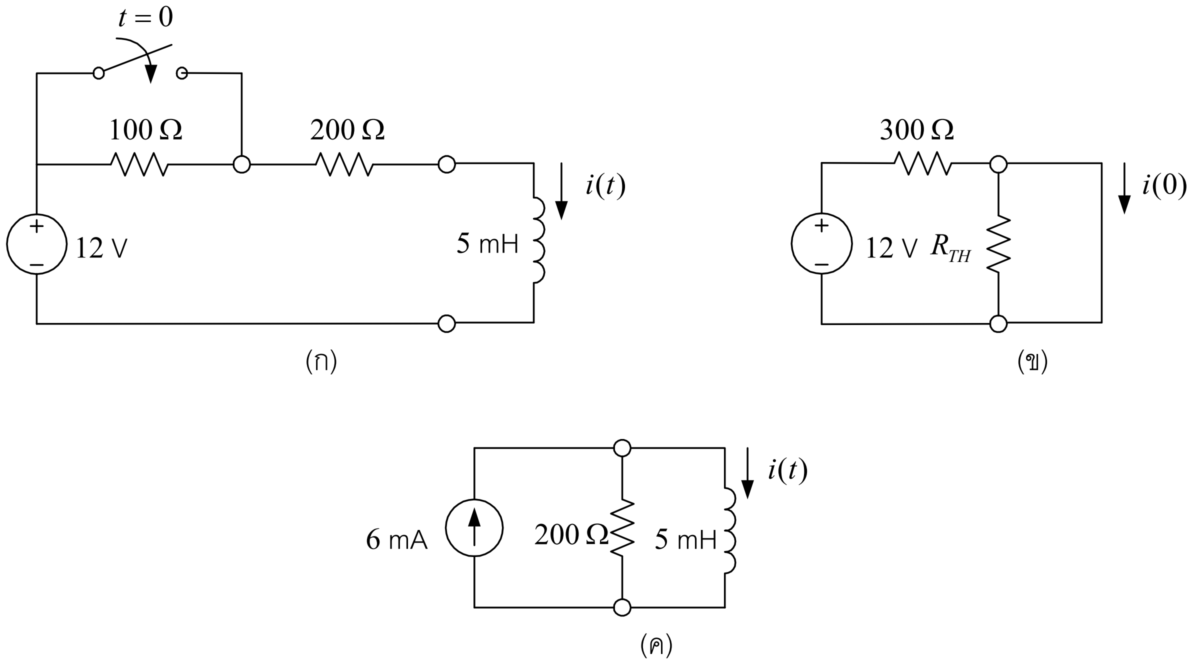
$$\tau = R_t C = (20 \times 10^3)(2 \times 10^{-6}) = 40 \text{ ms}$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ 7.10 ได้

$$v(t) = 8 - 0.8e^{-\frac{t}{40}} \text{ V}$$

เมื่อเวลา t มีหน่วยเป็น ms

ตัวอย่าง 7.4 สวิทซ์ในวงจรในรูป Ex 7.4 (ก) เปิดวงจรอยู่เป็นเวลานานมากก่อนที่จะปิดวงจรที่เวลา $t = 0$ ms จงหาค่ากระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำหลังจากสวิทซ์ปิดวงจร



รูปที่ Ex7.4

วิธีทำ เนื่องจากสวิทซ์ในวงจรเปิดวงจรอยู่เป็นเวลานานมากดังนั้นวงจรจะอยู่ในสภาวะคงตัว กระแสและแรงดันในวงจรทุกค่าจะเป็นค่าคงที่ ตัวเหนี่ยวนำจะปรากฏตัวเป็นปิดวงจร รูป Ex 7.4 (ข) แสดงวงจรเมื่อสวิทซ์เปิดวงจร เรารวมตัวต้านทาน $100\ \Omega$ และ $200\ \Omega$ ซึ่งต่ออนุกรมกันเข้าด้วยกันเป็นตัวต้านทาน $300\ \Omega$ อินพุทของวงจรคือแรงดันคงที่ 12 V และเมื่อวงจรอยู่ในสภาวะคงตัว จะได้ค่าเริ่มต้นของวงจร คือ กระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำที่เวลา $t = 0$ ms จากกฎของโอห์มคือ

$$i(0) = \frac{12}{300} = 40 \text{ mA}$$

รูป Ex 7.4 (ข) แสดงวงจรเมื่อสวิทซ์ปิดวงจรแล้ว เทียบวงจรนี้กับวงจรในรูปที่ 7.4 จะได้

$$R_t = 200\ \Omega \text{ และ } I_{sc} = \frac{12}{200} = 60 \text{ mA}$$

ค่าคงที่เวลาของวงจรนี้คือ

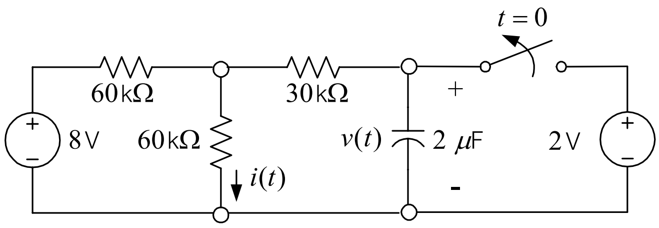
$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{5\times10^{-3}}{200} = 25\ \mu\text{s}$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ 7.11 ได้

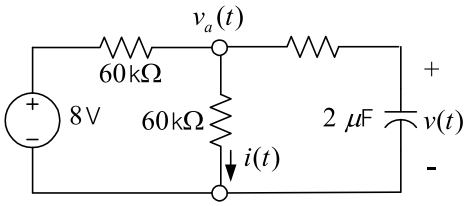
$$i(t) = 60 - 20e^{-\frac{t}{25}}\ \text{mA}$$

เมื่อเวลา t มีหน่วยเป็น μs

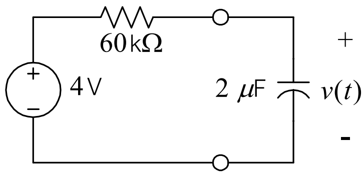
ตัวอย่าง 7.5 สวิทช์ในวงจรในรูป Ex 7.5 (ก) ปิดวงจรอยู่เป็นเวลานานมากก่อนที่จะเปิดวงจรที่เวลา $t = 0$ m จงหาค่ากระแส $i(t)$ หลังจากสวิทช์เปิดวงจร



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ Ex7.5

วิธีทำ ผลตอบสนองหรือเอาท์พุทของวงจรสามารถเป็นกระแสหรือแรงดันขององค์ประกอบใดในวงจรก็ได้ ในตัวอย่างนี้เราสนใจค่ากระแสผ่านตัวต้านทาน 60 kΩ ในกรณีนี้จะต้องใช้สองขั้นตอนคือหาผลตอบสนองค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุก่อน จากนั้นใช้ค่าที่ได้ในการหาค่ากระแสผ่านตัวต้านทาน 60 kΩ ต่อไป เนื่องจากสวิทช์ในวงจรปิดวงจรอยู่เป็นเวลานานมากดังนั้นวงจรจะอยู่ในสภาวะคงตัว กระแสและแรงดันในวงจรทุกค่าจะเป็นค่าคงที่ ตัวเก็บประจุจะปรากฏตัวเป็นเปิดวงจร ค่าเริ่มต้นของวงจรคือ

$$v(0) = 2\ \text{V}$$

รูป Ex 7.5 (ข) แสดงวงจรหลังจากสวิทช์เปิดวงจร ส่วนอื่นๆ ของวงจรยกเว้นตัวเก็บประจุถูกแทนด้วยวงจรสมมูลเทวินิน ดังในรูป Ex 7.5 (ค) โดยที่

$$V_{oc} = \frac{60\times10^3}{(60\times10^3)+(60\times10^3)}12 = 4\ \text{V}$$

และ

$$R_t = \frac{(60\times10^3)\times(60\times10^3)}{(60\times10^3)+(60\times10^3)} = 60 \text{ k}\Omega$$

ค่าคงที่เวลาของวงจรนี้คือ

$$\tau = R_t C = (60\times10^3)(2\times10^{-6}) = 120 \text{ ms}$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ 7.10 ได้

$$v(t) = 4 - 2e^{-\frac{t}{120}} \text{ V}$$

เมื่อเวลา t มีหน่วยเป็น ms

เมื่อทราบค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุแล้ว เราจะหาค่ากระแสผ่านตัวต้านทาน 60 kΩ โดยพิจารณาวงจรในรูป Ex 7.5 (ข) สังเกตว่าได้เขียนแรงดันโนดสำหรับโนดกลางในรูปนี้เป็น $v_a(t)$ สมการโนดที่โนดนี้คือ

$$\frac{v_a(t)-8}{60\times10^3} + \frac{v_a(t)}{60\times10^3} + \frac{v_a(t)-v(t)}{30\times10^3} = 0$$

แทนค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ $v(t)$

$$\frac{v_a(t)-8}{60\times10^3} + \frac{v_a(t)}{60\times10^3} + \frac{v_a(t)-\left(4-2e^{-\frac{t}{120}}\right)}{30\times10^3} = 0$$

หรือ

$$v_a(t) - 8 + v_a(t) + 2\left[v_a(t) - \left(4-2e^{-\frac{t}{120}}\right)\right] = 0$$

แก้สมการหาค่าแรงดันโนด $v_a(t)$

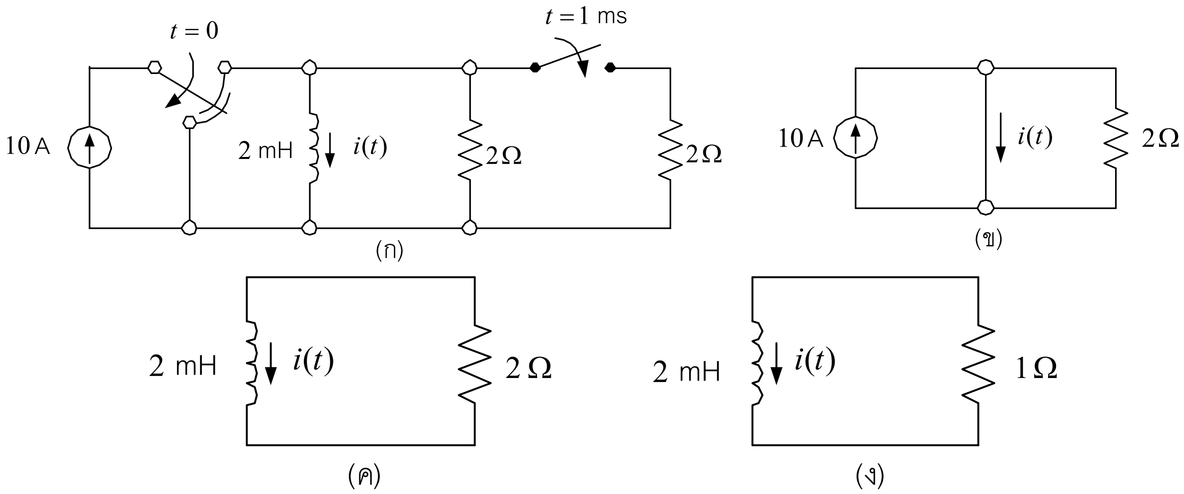
$$v_a(t) = \frac{8+2\left(4-2e^{-\frac{t}{120}}\right)}{4} = 4 - e^{-\frac{t}{120}} \text{ V}$$

และจะหาค่าค่ากระแสผ่านตัวต้านทาน 60 kΩ ได้

$$i(t) = \frac{v_a(t)}{60\times10^3} = \frac{4-e^{-\frac{t}{120}}}{60\times10^3} = 66.7 - 16.7e^{-\frac{t}{120}} \ \mu\text{A}$$

7.3 สวิทช์ลำดับ

ในวงจรทั่วไปอาจมีสวิทช์อยู่มากกว่าหนึ่งสวิทช์ ซึ่งสวิทช์เหล่านี้อาจเปลี่ยนตำแหน่งที่เวลาต่างกัน สวิทช์ลำดับ (Sequential Switching) จะเกิดขึ้นในวงจรเหล่านี้ เราสามารถใช้วิธีการที่ศึกษาในหัวข้อที่แล้วมาวิเคราะห์วงจรที่มีลักษณะการเกิดสวิทช์ลำดับได้ โดยอาศัยความจริงที่ว่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุและกระแสผ่านตัวเหนี่ยวนำไม่สามารถเปลี่ยนแปลงทันทีทันใดๆ ได้



รูปที่ 7.6 วงจรที่ประกอบด้วยสวิทช์ลำดับ

พิจารณาวงจรตัวอย่างในรูปที่ 7.6 (ก) วงจรนี้ประกอบด้วยสวิทช์สองตัว ตัวหนึ่งเปลี่ยนตำแหน่งที่เวลา $t = 0$ s และอีกตัวหนึ่งเปลี่ยนตำแหน่งที่เวลา $t = 1$ ms สมมติว่าวงจรอยู่ในสภาวะคงตัวก่อนหน้าสวิทช์ตัวแรกจะเปลี่ยนตำแหน่งที่เวลา $t = 0$ s รูปที่ 7.6 (ข) แสดงวงจรสมมูลขณะเวลา $t < 0$ เนื่องจากวงจรอยู่ในสภาวะคงตัวและแหล่งจ่ายเป็นค่าคงที่ ตัวเหนี่ยวนำจะปรากฏตัวเป็นปิดวงจร ทำให้แรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน $2\,\Omega$ มีค่าเป็นศูนย์ และจะมีค่ากระแสไหลผ่านตัวมันเป็นศูนย์ด้วย ดังนั้นกระแสทั้งหมดจากแหล่งจ่ายกระแสจะไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ ทำให้

$$i(t) = 10 \text{ A} \quad t < 0$$

ที่เวลาชั่วขณะก่อนสวิทช์เปลี่ยนตำแหน่ง $t = 0^-$ เราได้

$$i(0^-) = 10 \text{ A}$$

กระแสผ่านตัวเหนี่ยวนำไม่สามารถเปลี่ยนแปลงทันทีทันใดๆได้ ดังนั้น

$$i(0^+) = 10 \text{ A}$$

ซึ่งจะใช้เป็นเงื่อนไขเริ่มต้นของวงจรหลังจากสวิทช์ตัวแรกเปลี่ยนตำแหน่ง รูปที่ 7.6 (ค) แสดง วงจรสมมูลที่เวลา $t = 0^+$ ในที่นี้จะใช้วงจรสมมูลนอร์ตัน โดยที่

$$I_{sc} = 0 \text{ A} \text{ และ } R_t = 2\,\Omega$$

ค่าคงที่เวลาของวงจรนี้คือ

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{2\times10^{-3}}{2} = 1 \text{ ms}$$

จะได้ค่ากระแสผ่านตัวเหนี่ยวนำคือ

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = 10e^{-t} \text{ A}$$

สมการนี้ใช้สำหรับช่วงเวลา $0 < t < 1$ ms

ที่เวลาชั่วขณะก่อนสวิทช์ที่สองเปลี่ยนตำแหน่ง $t = 1^-$ เราได้

$$i(1^-) = 10e^{-1} = 3.68 \text{ A}$$

เนื่องจากกระแสผ่านตัวเหนี่ยวนำไม่สามารถเปลี่ยนแปลงทันทีทันใดๆได้ ดังนั้น

$$i(1^+) = 3.68 \text{ A}$$

ซึ่งจะใช้เป็นเงื่อนไขเริ่มต้นของวงจรหลังจากสวิทช์ตัวที่สองเปลี่ยนตำแหน่ง รูปที่ 7.6 (ง) แสดง วงจรสมมูล ที่เวลา $t = 1^+$ ในที่นี้จะใช้วงจรสมมูลนอร์ตัน โดยที่

$$I_{sc} = 0 \text{ A} \text{ และ } R_t = 1\,\Omega$$

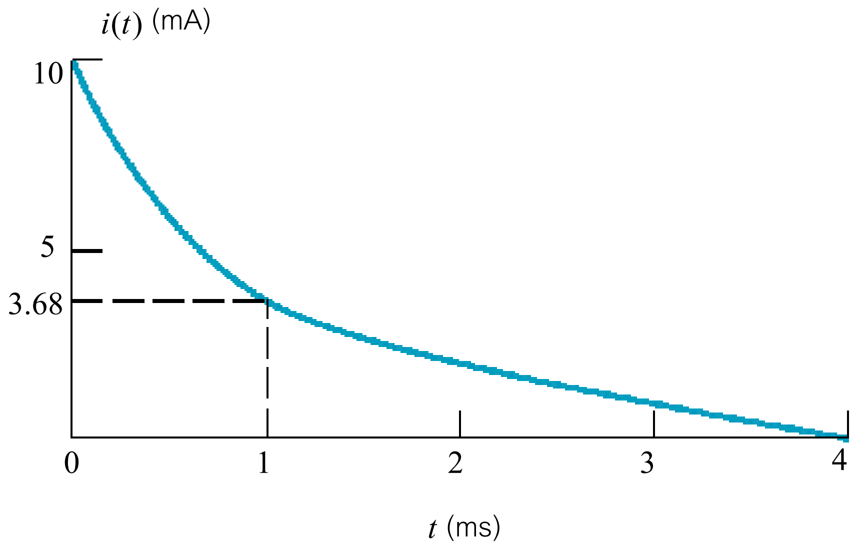
ค่าคงที่เวลาของวงจรนี้คือ

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{2\times10^{-3}}{1} = 2 \text{ ms}$$

จะได้ค่ากระแสผ่านตัวเหนี่ยวนำในช่วงเวลา $t > 1$ ms คือ

$$i(t) = i(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = 3.68e^{-\frac{t-1}{2}} \text{ A}$$

เมื่อเวลา t มีหน่วยเป็น ms รูปที่ 7.7 แสดงกราฟกระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำเทียบกับเวลา สังเกตว่าค่าคงที่เวลาของวงจรเปลี่ยนจาก 1 ms เป็น 2 ms เมื่อสวิทช์ตัวที่สองเปลี่ยนตำแหน่ง ดังจะเห็นในกราฟว่าค่าความชันเปลี่ยนที่เวลา $t = 1$ ms จาก –3.68 V/ms เป็น –3.68/2 V/ms



รูปที่ 7.7 กราฟกระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำเทียบกับเวลา

7.4 เสถียรภาพของวงจรอันดับหนึ่ง

จากการศึกษาในหัวข้อ 7.1 เราได้ทราบว่า ผลตอบสนองธรรมชาติของวงจรอันดับหนึ่งคือ

$$x_n(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

และผลตอบสนองสมบูรณ์คือ

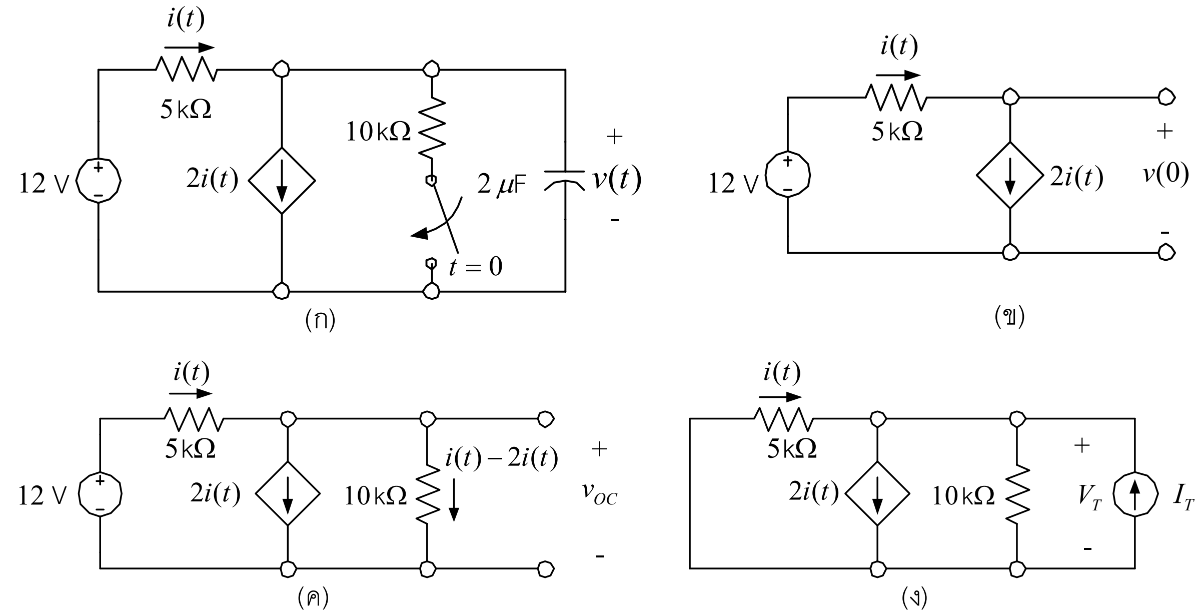
$$x(t) = x_n(t) + x_f(t)$$

เมื่อ $x_f(t)$ คือผลตอบสนองกระตุ้น เมื่อค่าคงที่เวลาของวงจร $\tau > 0$ ผลตอบสนองธรรมชาติจะหมดไปในที่สุดเมื่อ $t \to \infty$ จะเหลือแต่ผลตอบสนองกระตุ้น ในกรณีนี้เราเรียกว่าวงจรอยู่ในสภาวะเสถียร (Stable State) แต่เมื่อค่าคงที่เวลาของวงจร $\tau < 0$ ผลตอบสนองธรรมชาติจะเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต ในที่สุดเมื่อ $t \to \infty$ จะมีค่ามากกว่าผลตอบสนองกระตุ้นมาก ในกรณีนี้เราเรียกว่าวงจรอยู่ในสภาวะไม่เสถียร (Unstable State) สำหรับวงจรที่เสถียร ผลตอบสนองกระตุ้นจะขึ้นกับอินพุทหรือฟังก์ชันการกระตุ้น แต่วงจรที่ไม่สเถียรจะมีค่าผลตอบสนองต่อการกระตุ้นน้อยมากเมื่อเทียบกับผลตอบสนองธรรมชาติ หรือกล่าวว่าได้สูญเสียสัญญาณข้อมูลที่ใส่ที่อินพุทของวงจรไป ในทางปฏิบัติค่าของผลตอบสนองธรรมชาติ จะไม่สามารถเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต ในที่สุดจะถูกจำกัดด้วยข้อจำกัดทางกายภาพขององค์ประกอบวงจรหรือเกิดการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในวงจร เช่นองค์ประกอบวงจรบางตัวอาจเสียหายไป เป็นต้น ดังนั้นพฤติกรรมไม่เสถียรของวงจรจึงไม่เป็นที่ต้องการ

สำหรับคำถามว่า เราจะออกแบบวงจรอันดับหนึ่งอย่างไร ให้มีเสถียรภาพ ? จากที่เราทราบว่า ค่าคงที่เวลาของวงจร $\tau = R_t C$ หรือ $\tau = \dfrac{L}{R_t}$ จะเห็นว่าเราต้องการค่าความต้านทานสมมูลเป็นบวก $R_t > 0$

เพื่อให้วงจรเสถียร เงื่อนไขนี้จะเป็นจริงเสมอเมื่อส่วนประกอบทั้งหมดของวงจรยกเว้นตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำ ประกอบด้วยตัวต้านทานและแหล่งจ่ายอิสระวงจรเหล่านี้จะเสถียรเสมอ แต่สำหรับกรณีที่วงจรมีองค์ประกอบแอกทีฟ หรือมีแหล่งจ่ายขึ้นกับตัวแปรอื่น วงจรนั้นอาจไม่เสถียรก็ได้

ตัวอย่าง 7.6 พิจารณาวงจรอันดับหนึ่งในรูป Ex7.6 (ก) ซึ่งอยู่ในสภาวะคงตัวก่อนหน้าที่สวิทช์จะปิดวงจรที่เวลา $t=0$ จงหาค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ $v(t)$ สำหรับ $t>0$



รูปที่ Ex7.6

วิธีทำ วงจรนี้มีแหล่งจ่ายขึ้นกับตัวแปรอื่น วงจรนี้อาจจะไม่เสถียร จากที่ค่าอินพุทเป็นค่าคงที่จะได้ว่าในสภาวะคงตัว ตัวเก็บประจุจะปรากฏตัวเป็นเปิดวงจร เราจะคำนวณหาค่าเริ่มต้นวงจรได้ จากวงจรสมมูลในรูป Ex7.6 (ข) ใช้ KCL ที่โนดบนจะได้

$$i+2i=0$$

ดังนั้น $i=0$ และจะไม่มีแรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน ทำให้ได้

$$v(0)=12 \text{ V}$$

จากนั้นหาวงจรสมมูลเทวินินสำหรับวงจรส่วนที่ไม่ใช่ตัวเก็บประจุ ในรูป Ex7.6 (ค) โดยเขียน KVL ในเมซซ้ายมือได้

$$12=(10\times10^3)\times i+(5\times10^3)\times(i-2i)$$

แก้สมการหาค่ากระแสได้

$$i=2.4 \text{ mA}$$

ใช้กฎของโอห์มที่ตัวต้านทาน $5\ \text{k}\Omega$ จะได้

$$V_{oc} = (5\times10^3)\times(i-2i) = -12\ \text{V}$$

จากนั้นหาค่าความต้านทานสมมูลเทวินินโดยใช้กระแสทดสอบ ดังในรูป Ex7.6 (ง) จะได้
แก้สมการหาค่ากระแสจะได้

$$i = -I_T$$

ใช้กฎของโอห์มที่ตัวต้านทาน $5\ \text{k}\Omega$ จะได้

$$V_T = (5\times10^3)\times(I_T + i - 2i) = 10\times10^3\times I_T$$

ดังนั้นค่าความต้านทานสมมูลเทวินินคือ

$$R_t = \frac{V_T}{I_T} = -10\ \text{k}\Omega$$

ค่าคงที่เวลาของวงจรคือ

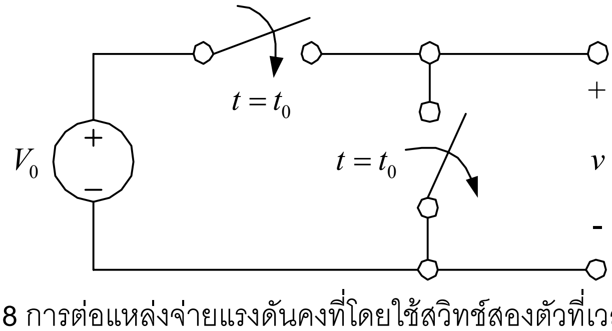
$$\tau = R_t C = -20\ \text{ms}$$

จะเห็นได้ว่าวงจรไม่เสถียร โดยที่ผลตอบสนองสมบูรณ์คือ

$$v(t) = -12 + 24e^{\frac{t}{20}}\ \text{V}$$

7.5 แหล่งจ่ายแบบยูนิตสเตป

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้ศึกษาวงจรอันดับหนึ่งที่มีแหล่งจ่ายซึ่งถูกต่อเข้าหรือตัดออกด้วยสวิทช์ ที่เวลา $t = t_0$ ที่เวลาขณะที่ทำการต่อหรือตัดแหล่งจ่ายนั้นอาจจะก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงขึ้นในค่ากระแสหรือแรงดันในวงจร

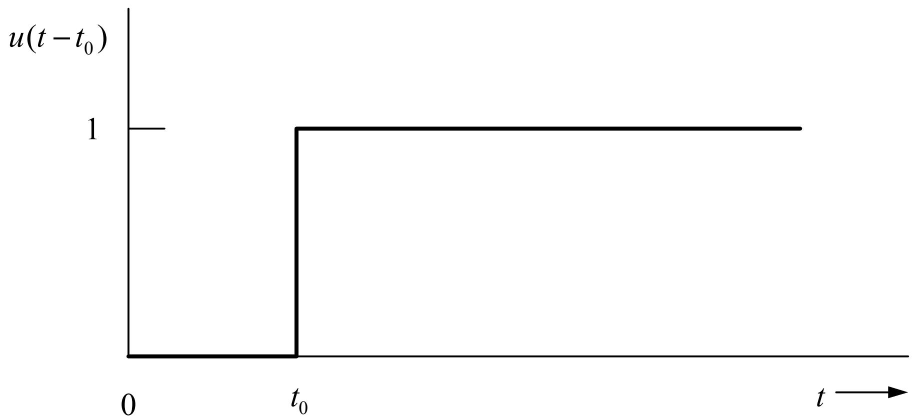


รูปที่ 7.8 การต่อแหล่งจ่ายแรงดันคงที่โดยใช้สวิทช์สองตัวที่เวลา $t = t_0$

การต่อแหล่งจ่ายแรงดันคงที่โดยใช้สวิทช์สองตัวที่เวลา $t = t_0$ ดังแสดงในรูปที่ 7.8 อาจพิจารณาเทียบได้กับการต่อแหล่งจ่ายสมมูลซึ่งมีค่าแรงดันเป็นศูนย์จนถึงเวลา $t = t_0$ จากนั้นจะมีค่าแรงดันเท่ากับ V_0 เราจะนิยามแหล่งจ่ายที่มีลักษณะแบบนี้ว่าเป็นแหล่งจ่ายแบบยูนิตสเตป (Unit Step Source) โดยมีค่า

ฟังก์ชันเป็นศูนย์เมื่อ $t < t_0$ และมีค่าเป็นหนึ่งเมื่อ $t > t_0$ มีการเปลี่ยนค่าแรงดันจากศูนย์เป็นหนึ่งที่เวลา $t = t_0$ เราจะแทนฟังก์ชันยูนิตสเตปด้วย

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{7.12}$$

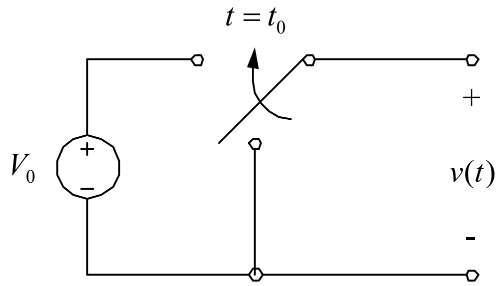


รูปที่ 7.9 ฟังก์ชันยูนิตสเตป

รูปที่ 7.9 แสดงฟังก์ชันยูนิตสเตป ซึ่งไม่มีหน่วย ถ้าเราต้องการแทนแหล่งจ่ายในรูปที่ 7.8 ด้วยฟังก์ชันยูนิตสเตป เราจะได้

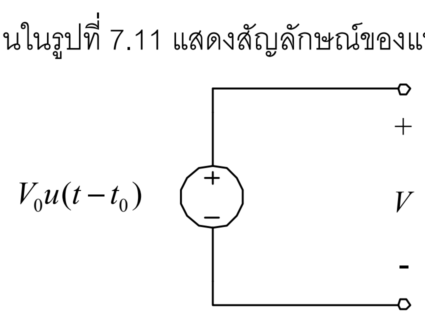
$$v(t) = V_0 u(t - t_0)$$

ซึ่งหมายถึงการป้อนแรงดันคงที่ V_0 ที่เวลา t_0 ให้กับวงจรนั่นเอง



รูปที่ 7.10 วงจรสมมูลของฟังก์ชันยูนิตสเตป

รูปที่ 7.10 แสดงวงจรสมมูลของฟังก์ชันยูนิตสเตปโดยการใช้สวิทช์เพียงหนึ่งตัว ซึ่ง $v = 0$ เมื่อ $t < t_0$ และ $v = V_0$ เมื่อ $t > t_0$ ส่วนในรูปที่ 7.11 แสดงสัญลักษณ์ของแหล่งจ่ายแบบ ยูนิตสเตป $u(t - t_0)$



รูปที่ 7.11 สัญลักษณ์ของแหล่งจ่ายแบบ ยูนิตสเตป $u(t - t_0)$

ผลตอบสนองสเตป (Unit Step Response) คือผลตอบสนองของวงจรต่อการกระตุ้นด้วยแหล่งจ่ายแบบยูนิตสเตป $v(t) = V_0 u(t - t_0)$ เมื่อเงื่อนไขเริ่มต้นของวงจรทั้งหมดเป็นศูนย์ หรือไม่มีพลังงานสะสมอยู่เลย

ฟังก์ชัน $u(-t)$ ก็คือฟังก์ชันที่มีค่าเป็นหนึ่งเมื่อ $t < 0$ และ เป็นศูนย์เมื่อ $t > 0$ เขียนได้เป็น

$$u(-t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \tag{7.13}$$

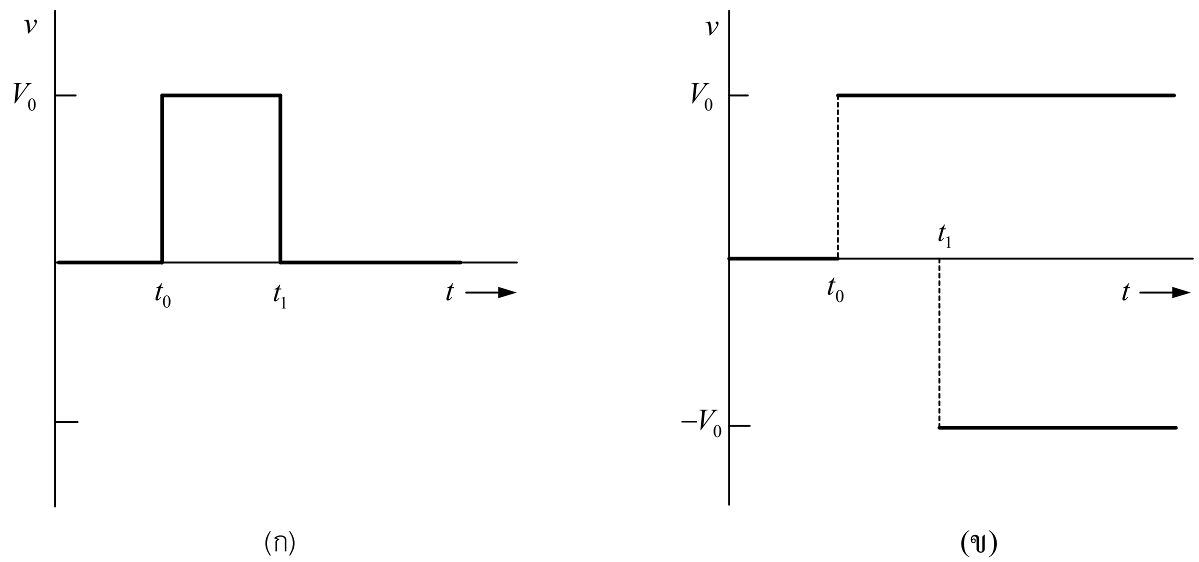
ถ้าการเปลี่ยนค่าเกิดขึ้นที่เวลา t_0 จะได้

$$u(t_0 - t) = \begin{cases} 1 & t < t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases} \tag{7.14}$$

พิจารณาแหล่งจ่ายพัลส์

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ V_0 & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases} \tag{7.15}$$

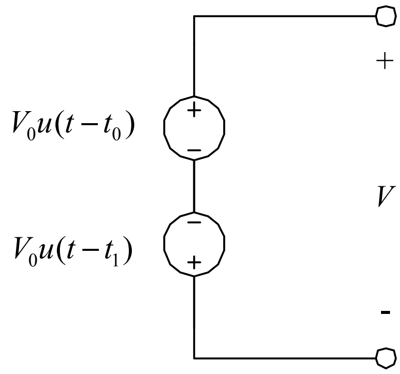
ดังแสดงในรูปที่ 7.12 (ก) ซึ่งแรงดันพัลส์นี้สามารถได้จากการรวมแรงดันสเตปสองฟังก์ชัน ดังแสดงในรูปที่ 7.12 (ข) โดยที่ฟังก์ชันแรกมีขนาด V_0 เกิดขึ้นที่เวลา $t = t_0$ ฟังก์ชันที่สองมีขนาด $-V_0$ เกิดขึ้นที่เวลา $t = t_1$



รูปที่ 7.12 (ก) แหล่งจ่ายพัลส์ (ข) แหล่งจ่ายสเตปสองแหล่งจ่ายต่ออนุกรมกันเพื่อทำให้ได้แรงดันพัลส์ (ก) จะได้ผลรวมของฟังก์ชันสเตปทั้งสองเป็น

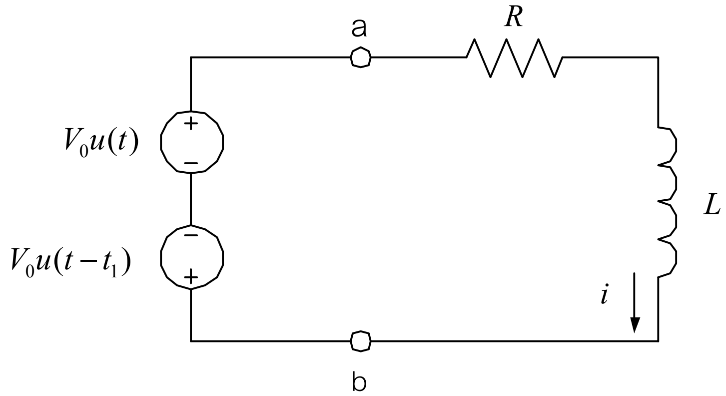
$$v(t) = V_0 u(t - t_0) - V_0 u(t - t_1)$$

ซึ่งก็คือฟังก์ชันพัลส์ที่มีความกว้างพัลส์เท่ากับ $t_1 - t_0$ นั่นเอง รูปที่ 7.13 แสดงแหล่งจ่ายสเตปสองแหล่งจ่ายต่ออนุกรมกันเพื่อทำให้ได้แรงดันพัลส์ที่ต้องการ



รูปที่ 7.13 แหล่งจ่ายสเตปสองแหล่งจ่ายต่ออนุกรมกันเพื่อทำให้ได้แรงดันพัลส์ที่ต้องการ

ฟังก์ชันสเตปเป็นฟังก์ชันในอุดมคติเท่านั้น ในทางปฏิบัติไม่มีองค์ประกอบใดๆที่จะสามารถสวิทช์ทันทีทันใดได้ โดยไม่ใช้เวลาในการสวิทช์เลย อย่างไรก็ตามหากเวลาที่ใช้ในการสวิทช์สั้นมาก เช่น น้อยกว่า 1 ns เราอาจพิจารณาว่าการสวิทช์เกิดขึ้นทันทีทันใด หลักปฏิบัติทั่วไปก็คือหากเวลาในการสวิทช์มีค่าน้อยกว่าค่าคงที่เวลาของวงจรมากๆ จะถือได้ว่าการสวิทช์เกิดขึ้นทันทีทันใด



รูปที่ 7.14 การป้อนสัญญาณพัลส์เข้ากับวงจร RL

พิจารณาการป้อนสัญญาณพัลส์เข้ากับวงจร RL ในรูปที่ 7.14 เมื่อเงื่อนไขเริ่มต้น $i(0)=0$ เราต้องการหาค่ากระแส $i(t)$ สำหรับการกระตุ้นด้วยแหล่งจ่ายพัลส์ ใช้หลักการการทับซ้อนจะได้

$$i = i_1 + i_2$$

เมื่อ i_1 คือผลตอบสนองต่อแหล่งจ่าย $V_0\,u(t)$ และ i_2 คือผลตอบสนองต่อแหล่งจ่าย $V_0\,u(t-t_1)$ จากสมการ (7.11) แทนค่า $i(0)=0$ และ $I_{sc} = V_0/R$ จะได้

$$i = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t-t_n}{\tau}}\right) \quad t > t_n$$

เมื่อคือ t_n เวลาที่เกิดการเปลี่ยนแปลงในวงจร และ $\tau = R/L$ ดังนั้นจะได้

$$i_1 = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad t > 0$$

และ

$$i_2 = \frac{-V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}\right) \quad t > t_1$$

รวมผลตอบสนองทั้งสองจะได้

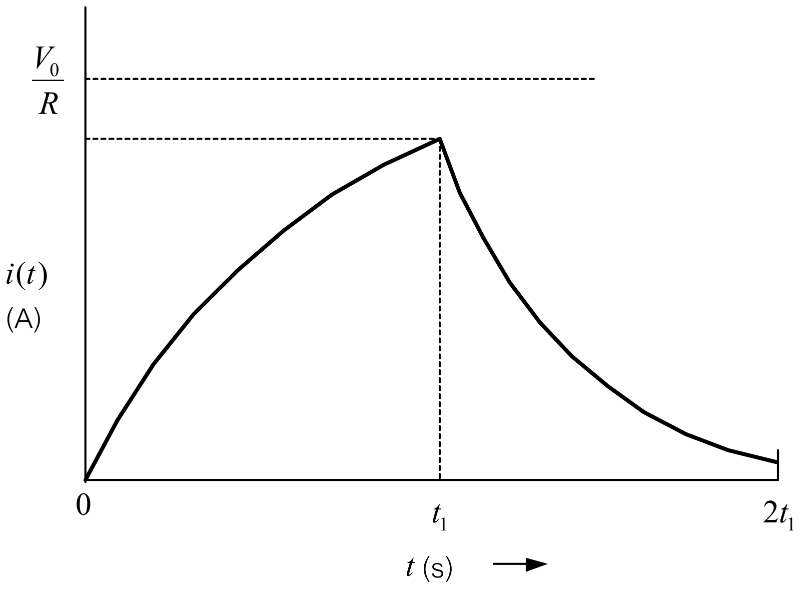
$$i_1 = \begin{cases} \dfrac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & 0 < t < t_1 \\ \dfrac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}\left(e^{\frac{t}{\tau}} - 1\right) & t > t_1 \end{cases}$$

และกระแสมีค่าเป็นศูนย์เมื่อ $t < 0$ รูปที่ 7.15 แสดงผลตอบสนองเทียบกับเวลา ค่าขนาดของกระแสที่เวลา $t = t_1$ คือ

$$i(t_1) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) \quad \text{A}$$

ถ้าความกว้างของพัลส์ t_1 มีค่ามากกว่าค่าคงที่เวลา τ กระแส $i(t_1)$ จะเข้าสู่ค่าสูงสุด V_0/R ก่อนที่จะลดค่าลงดังในรูปที่ 7.15 ส่วนค่าขนาดของกระแสที่เวลา $t = 2t_1$ คือ

$$i(2t_1) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{2t_1}{\tau}}\left(e^{\frac{t_1}{\tau}} - 1\right) = \frac{V_0}{R}\left(e^{-\frac{t_1}{\tau}} - e^{-\frac{2t_1}{\tau}}\right) \text{A}$$



รูปที่ 7.15 ผลตอบสนองของวงจร RL เทียบกับเวลา

7.6 ผลตอบสนองต่ออินพุทที่เปลี่ยนแปลงกับเวลา

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราพิจารณาว่าวงจรที่ถูกกระตุ้นด้วยแหล่งจ่ายที่เป็นค่าคงที่จะได้ผลตอบสนองกระตุ้นเป็นค่าคงที่เช่นเดียวกัน ในหัวข้อนี้จะศึกษาผลตอบสนองในกรณีที่แหล่งจ่ายไม่เป็นค่าคงที่

สมการอนุพันธ์ที่ใช้อธิบายวงจร RC หรือ RL สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}x(t) + ax(t) = y(t) \tag{7.16}$$

เมื่อ $y(t)$ คือค่าคงที่เมื่อเรามีเฉพาะแหล่งจ่ายกระแสหรือแรงดันคงที่ในวงจร และ $a = 1/\tau$ คือส่วนกลับของค่าคงที่เวลา

ในหัวข้อนี้จะได้แนะนำวิธีการอินตริเกรทแบบตัวประกอบ (Integrating Factor Method) ซึ่งจะประกอบด้วยการคูณสมการ (7.16) ด้วยตัวประกอบเพื่อทำให้ด้านซ้ายมือของสมการเป็นอนุพันธ์ที่สมบูรณ์ (Perfect Derivative) จากนั้นจึงอินตริเกรททั้งสองข้าง

พิจารณาอนุพันธ์ของผลคูณของสองพจน์เช่น

$$\frac{d}{dt}(xe^{at}) = \frac{dx}{dt}e^{at} + axe^{at} = \left(\frac{dx}{dt} + ax\right)e^{at} \tag{7.17}$$

พจน์ในวงเล็บของด้านขวามือของสมการ (7.17) เหมือนกับด้านซ้ายมือของสมการ (7.16) ดังนั้นถ้าเราคูณทั้งสองข้างของสมการ (7.16) ด้วย e^{at} ด้านซ้ายมือจะสามารถแทนด้วยอนุพันธ์ที่สมบูรณ์ $\frac{d}{dt}(xe^{at})$ จากขั้นตอนเหล่านี้เราจะได้

$$\left(\frac{d}{dt}x + ax\right)e^{at} = ye^{at}$$

หรือ

$$\frac{d}{dt}\left(xe^{at}\right) = ye^{at}$$

อินตริเกรททั้งสองข้าง

$$xe^{at} = \int ye^{at}dt + K$$

เมื่อ K คือค่าคงที่ของการอินตริเกรท คูณตลอดด้วย e^{-at} เพื่อหาค่า $x(t)$

$$x = e^{-at}\int ye^{at}dt + Ke^{-at} \tag{7.18}$$

สำหรับกรณีที่แหล่งจ่ายเป็นค่าคงที่ $y(t) = M$ จะได้

$$
\begin{aligned}
x &= e^{-at} M \int e^{at} dt + K e^{-at} \\
&= \frac{M}{a} + K e^{-at} \\
&= x_f + x_n
\end{aligned}
$$

เมื่อผลตอบสนองธรรมชาติ $x_n = Ke^{-at}$ และผลตอบสนองกระตุ้น $x_f = \dfrac{M}{a}$ ซึ่งเป็นค่าคงที่

พิจารณากรณีที่แหล่งจ่าย $y(t)$ ไม่ใช่ค่าคงที่ จากสมการ (7.18) จะได้ว่าผลตอบสนองธรรมชาติจะยังคงเหมือนเดิม คือ $x_n = Ke^{-at}$ แต่ผลตอบสนองกระตุ้นจะเป็น

$$x_f = e^{-at} \int y(t) e^{at} dt$$

ดังนั้นผลตอบสนองกระตุ้นจึงขึ้นอยู่กับฟังก์ชันกระตุ้น $y(t)$ พิจารณากรณีที่ $y(t)$ เป็นฟังก์ชันเอกโปเนนเทียล $y(t) = e^{bt}$ โดยที่ $a + b \neq 0$ จะได้

$$
\begin{aligned}
x_f &= e^{-at} \int e^{bt} e^{at} dt \\
&= e^{-at} \int e^{(a+b)t} dt \\
&= \frac{1}{a+b} e^{-at} e^{(a+b)t} \\
&= \frac{e^{bt}}{a+b}
\end{aligned}
$$

นั่นคือผลตอบสนองกระตุ้นของวงจร RC หรือ RL ใดๆ ต่อฟังก์ชันการกระตุ้นแบบเอกโปเนนเทียล คือฟังก์ชันที่มีรูปแบบเดียวกับฟังก์ชันกระตุ้น เมื่อ $a + b \neq 0$ จากผลนี้เราจะสรุปได้ว่าผลตอบสนองกระตุ้นจะมีฟังก์ชันรูปแบบเดียวกันกับฟังก์ชันกระตุ้น และจะได้หาความสัมพันธ์ภายใต้เงื่อนไขนั้นๆ ต่อไป

ตัวอย่าง 7.7 จงหาค่ากระแส i สำหรับวงจรในรูป Ex7.7 (ก) สำหรับ $t > 0$ กำหนด

$$v_s = 10e^{-2t} u(t) \text{ V}$$

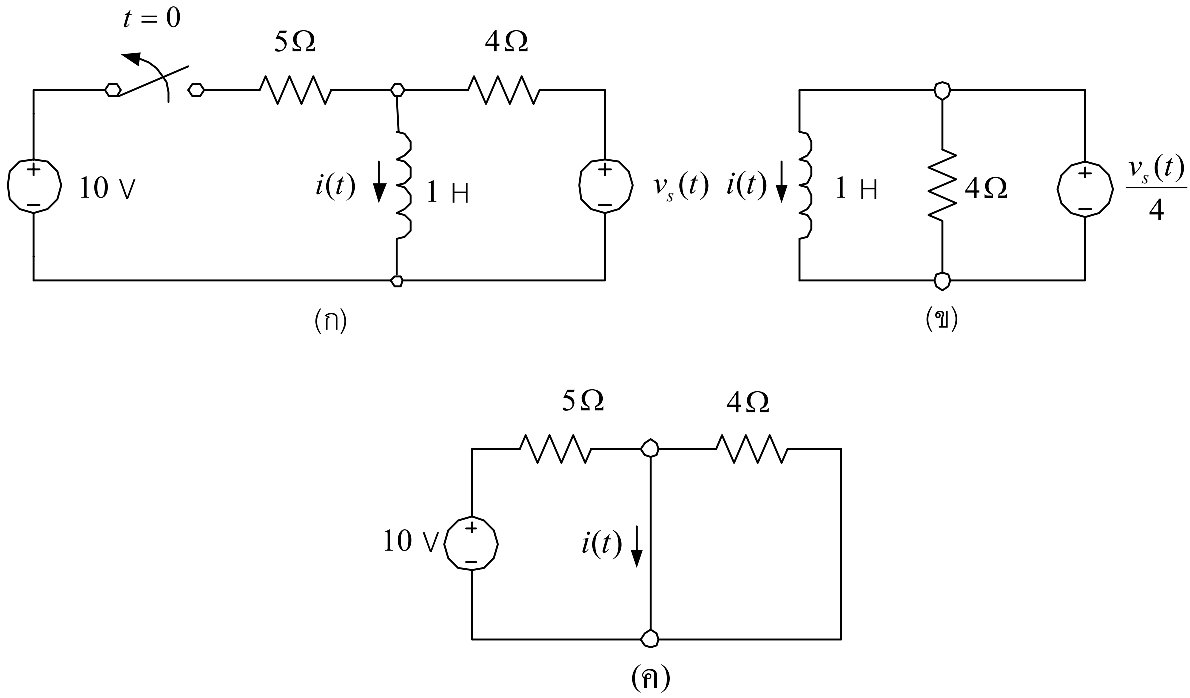
และวงจรอยู่ในสภาวะคงตัวที่เวลา $t = 0^-$

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชันการกระตุ้นเป็นแบบเอกโปเนนเทียล เราคาดว่าผลตอบสนองกระตุ้นจะเป็นฟังก์ชันแบบเอกโปเนนเทียลเช่นเดียวกัน ดังนั้น

$$i_f = Be^{-2t}$$

สำหรับ $t > 0$ เขียน KVL รอบวงรอบจะได้

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v_s$$



รูปที่ Ex7.7

แทนค่าต่างๆ จะได้

$$\frac{di}{dt} + 4i = 10e^{-2t}$$

แทนค่าคำตอบ $i_f = Be^{-2t}$

$$-2Be^{-2t} + 4Be^{-2t} = 10e^{-2t}$$

หรือ

$$(-2B + 4B)e^{-2t} = 10e^{-2t}$$

แก้สมการหาค่า B จะได้ $B = 5$ และได้ผลตอบสนองกระตุ้น

$$i_f = 5e^{-2t}$$

ผลตอบสนองธรรมชาติสามารถหาได้จาก วงจรสมมูลในรูป Ex7.7 (ข) ซึ่งแทนวงจรหลังจาก สวิทช์เปิดวงจร ส่วนอื่นของวงจรยกเว้นตัวเหนี่ยวนำถูกแทนด้วยวงจรสมมูลนอร์ตัน จะได้ค่าผลตอบสนองธรรมชาติคือ

$$i_n = Ae^{-\frac{R_t}{L}t} = Ae^{-4t}$$

ดังนั้นจะได้ผลตอบสนองสมบูรณ์

$$i = i_n + i_f = Ae^{-4t} + 5e^{-2t}$$

ค่าคงที่ A สามารถหาได้จากค่ากระแสของตัวเหนี่ยวนำที่เวลา $t=0$ หรือค่าเริ่มต้นของกระแส $i(0)$ นั่นเอง จากวงจรในรูป Ex 7.7 (ค) ซึ่งแทนวงจรก่อนหน้าที่สวิทช์จะเปิด เนื่องจาก $v_s(t)=0$ เมื่อ $t<0$ ดังนั้นแหล่งจ่ายแรงดันจึงถูกแทนด้วยปิดวงจร และเนื่องจากวงจรอยู่ในสภาวะคงตัวก่อนหน้าที่สวิทช์จะเปิดและถูกกระตุ้นด้วยอินพุทค่าคงที่ 10 V ดังนั้นตัวเหนี่ยวนำจะปรากฏตัวเป็นปิดวงจร จะได้ค่ากระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำที่เวลา $t=0$ คือ

$$i(0)=\frac{10}{5}=2 \text{ A}$$

ดังนั้นที่เวลา $t=0$ จะได้กระแส

$$i(0)=Ae^{-4\times 0}+5e^{-2\times 0}=A+5$$

แทนค่า $i(0)=2$ A จะได้

$$A=2-5=-3$$

แทนค่าในผลตอบสนองสมบูรณ์

$$i=-3e^{-4t}+5e^{-2t} \quad t>0$$

แหล่งจ่ายแบบนี้เรียกว่าเป็นฟังก์ชันไม่มีคาบ (Nonperiodic Function) แหล่งจ่ายคาบ (Periodic Source) คือแหล่งจ่ายที่จะซ้ำค่าทุกๆช่วงเวลาคงที่ค่าหนึ่ง เรียกว่าคาบ (Period) ใช้สัญลักษณ์ T ดังนั้นฟังก์ชัน $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบ ถ้ามีจำนวน ซึ่งทำให้

$$f(t+T)=f(t) \tag{7.19}$$

สำหรับทุกค่าเวลาใดๆ t ฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาค่า T ที่จะทำให้สมการ (7.19) เป็นจริงได้จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันไม่มีคาบ ตัวอย่างของฟังก์ชันคาบคือ $10\sin 2t$ ซึ่งมีคาบ π s

ตัวอย่าง 7.8 จงหาค่าผลตอบสนอง $v(t)$ สำหรับวงจรในรูป Ex7.8 (ก) สำหรับ $t>0$ กำหนด

$$i_s=10\sin 2t\,u(t) \text{ A}$$

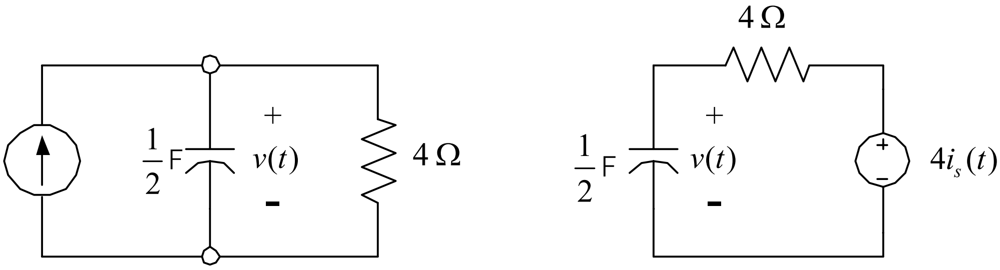
วงจรอยู่ในสภาวะคงตัวที่เวลา $t=0^-$ และมีค่าแรงดันเริ่มต้น $v(0)=0$ V

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชันการกระตุ้นเป็นแบบไซนูซอยด์ เราคาดว่าผลตอบสนองกระตุ้นจะเป็นฟังก์ชันแบบไซนูซอยด์เช่นเดียวกัน เขียน KCL ที่โนด a ได้

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=i_s$$

หรือ

$$0.5\frac{dv}{dt}+\frac{v}{4}=10\sin 2t \tag{7.20}$$



(ก) (ข)

รูปที่ Ex7.8

สำหรับ $t>0$ เราคาดว่าผลตอบสนองกระตุ้น v_f จะประกอบด้วยพจน์ $\sin 2t$ และอนุพันธ์ของมัน จากสมการ (7.20) $v_f/4$ บวก $0.5\frac{d}{dt}v_f$ ต้องเท่ากับ $10\sin 2t$ แต่

$$\frac{d}{dt}\sin 2t=2\cos 2t$$

ดังนั้นผลตอบสนองกระตุ้น v_f จึงต้องประกอบด้วยพจน์ $\sin 2t$ และ $\cos 2t$ ทดลองให้ค่า

$$v_f=A\sin 2t+B\cos 2t$$

จะได้อนุพันธ์ของ v_f คือ

$$\frac{d}{dt}v_f=2A\cos 2t-2B\sin 2t$$

แทนค่า v_f และอนุพันธ์ $\frac{d}{dt}v_f$ ลงในสมการ (7.20)

$$(A\cos 2t-B\sin 2t)+\frac{1}{4}(A\sin 2t+B\cos 2t)=10\sin 2t$$

เทียบเท่าสัมประสิทธิ์ของ $\sin 2t$ และ $\cos 2t$ จะได้

$$\left(\frac{A}{4}-B\right)=10$$

และ

$$\left(A+\frac{B}{4}\right)=0$$

แก้สมการทั้งสองหาค่า A และ B ได้

$$A=\frac{40}{17}\text{ และ }B=\frac{-160}{17}$$

และจะได้ผลตอบสนองกระตุ้น