บทที่ 5
อนุพันธ์ (Derivatives)

Chapter 5 : Derivatives

- The Derivative as a Function
- The Derivative as a Rate of Change
- Derivatives of Products, Quotients, and Negative Power
- Derivatives of Trigonometric Functions
- The Chain Rule
- Implicit Differentiation
- Related Rates

อนุพันธ์เป็นฟังก์ชัน
(The Derivative as a Function)

ที่ท้ายของบทที่ 1 เรานิยามความชันของโค้ง $y = f(x)$

ที่จุดที่ $x = x_0$ เป็น $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

เราเรียกลิมิตนี้(ถ้ามี)ว่า อนุพันธ์ของ f ที่ x_0

นิยาม ฟังก์ชันอนุพันธ์ (Derivative Function)

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ เทียบกับตัวแปร x คือฟังก์ชัน $f'(x)$ ซึ่งมีค่าที่ x เป็น

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

โดยที่ลิมิตจะต้องหาค่าได้ (สัญลักษณ์อื่นที่ใช้ได้แก่ y', $\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$, ฯลฯ)

ตัวอย่าง ให้ $y = \sqrt{x}$

(a) จงหาอนุพันธ์ของ f สำหรับ $x > 0$

(b) จงหาเส้นสัมผัส (tangent line) กับโค้ง $f(x)$ ที่ $x = 4$

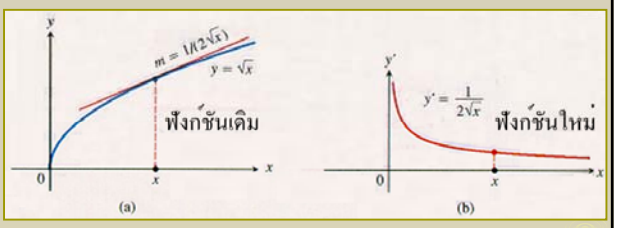
วิธีทำ (a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ แทนค่าลงใน f

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$ คูณด้วยค่า conjugate

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

เมื่อนำฟังก์ชันเดิมและอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาเขียนกราฟ



จะได้ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเดิมก็เป็นฟังก์ชันด้วย

(b) จงหาเส้นสัมผัส (tangent line) กับโค้ง $y = \sqrt{x}$ ที่ x = 4

วิธีทำ หาเส้นสัมผัส จาก point-slope form :

$y - y_1 = m(x - x_1)$: $x_1 = 4, y_1 = f(4) = 2$

และ $m = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ที่ x = 4 จะได้ m = 1/4

ดังนั้น แทนค่าลงสมการเส้นตรง จะได้

$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$ หรือ $y = \frac{x}{4} + 1$

สัญลักษณ์ (notation) ของอนุพันธ์มีหลายรูปแบบดังนี้

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ x = a เราเขียนในรูปลิมิตได้ว่า

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

อนุพันธ์ของ y = f(x) ที่ x = a

เขียนแทนด้วย

$$y'|_{x=a} \text{ or } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \text{ or } \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$$

การหาค่าอนุพันธ์ (Differentiation)

กฎข้อที่ 1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันคงที่

ถ้า f มีค่าคงตัว $f(x) = c$ แล้ว

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

กฎข้อที่ 2 การยกกำลังสำหรับเลขจำนวนเต็มบวก

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

กฎข้อที่ 3 การคูณด้วยค่าคงที่

ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ของ x และ c เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

กฎข้อที่ 4 อนุพันธ์ของผลรวม

ถ้า u และ v เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ของ x แล้ว ผลบวก u + v จะมีอนุพันธ์ที่ทุกจุดที่ซึ่งทั้ง u และ v มีอนุพันธ์ ที่จุดดังกล่าว

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

พิสูจน์ กฎข้อที่ 2 $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

จาก $f(x) = x^n$ และใช้ความรู้

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \frac{(h)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h}$$

$$= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}$$

เมื่อ h -> 0 จะมีค่าลิมิต x^{n-1} อยู่ n เทอม

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

พิสูจน์ กฎข้อที่ 4 $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

จาก $f(x) = u(x) + v(x)$

$$\frac{d}{dx}[u(x)+v(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

ตัวอย่าง การหาเส้นสัมผัสในแนวนอน

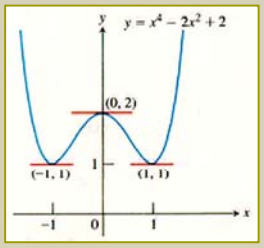
จงหาว่าโค้ง $y = x^4 - 2x^2 + 2$ มีเส้นสัมผัสในแนวนอนที่ตำแหน่งไหน

วิธีทำ ความชันของเส้นสัมผัสในแนวนอนคือ $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$$

$4x(x-1)(x+1) = 0$ จะได้ $x = 0, 1, -1$

กราฟจะมีเส้นสัมผัสในแนวนอนที่ x = 0, 1และ -1 จุดบนโค้งคือ (0, 1), (1, 1) และ (-1, 1)



$y = x^4 - 2x^2 + 2$

$\frac{dy}{dx} = 0$

$x = 0, 1, -1$

จุดบนโค้งคือ (0, 1), (1, 1) และ (-1, 1)

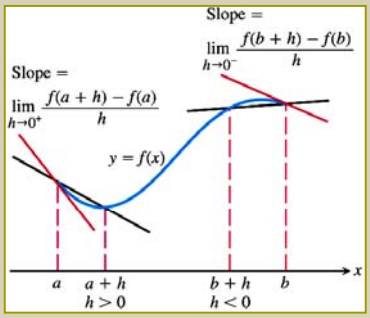
การหาอนุพันธ์ได้ในช่วงและอนุพันธ์ด้านเดียว

(One-Sided Derivatives)

ฟังก์ชัน y = f(x) หาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a, b) ถ้ามันมีอนุพันธ์ที่แต่ละจุดของช่วง และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงปิด [a, b] ถ้ามันมีอนุพันธ์ในช่วงภายใน (a, b) และมีลิมิต

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ จะมีอนุพันธ์ขวามือ ที่จุดปลาย a

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$ จะมีอนุพันธ์ซ้ายมือ ที่จุดปลาย b



ฟังก์ชันจะมีอนุพันธ์ที่จุดใดๆ ก็ต่อเมื่อมันมีอนุพันธ์ซ้ายมือ และ ขวามือที่นั่น และ อนุพันธ์ทั้งสองเท่ากัน

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $y = |x|$ มีอนุพันธ์ในช่วง (-∞, 0) และ (0, ∞) แต่ไม่มีอนุพันธ์ที่ x = 0

วิธีทำ

อนุพันธ์ขวามือ**ช่วง** (0, ∞) $\frac{d|x|}{dx} = \frac{d(x)}{dx} = 1$

อนุพันธ์ซ้ายมือ**ช่วง** (- ∞, 0) $\frac{d|x|}{dx} = \frac{d(-x)}{dx} = -1$

จะได้ว่า f มีอนุพันธ์ตลอด**ช่วง** (0, ∞) และ(- ∞, 0)

จากกราฟ ที่ x = 0

อนุพันธ์ขวามือ $\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$

อนุพันธ์ซ้ายมือ $\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|-h|}{h} = -1$

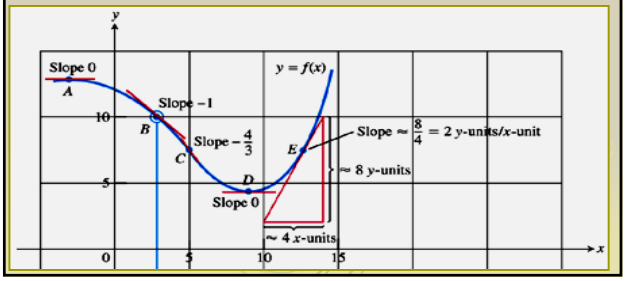
อนุพันธ์ขวามือ ไม่เท่ากับ อนุพันธ์ซ้ายมือ จึงสรุปได้ว่า ไม่มีอนุพันธ์ที่ x = 0

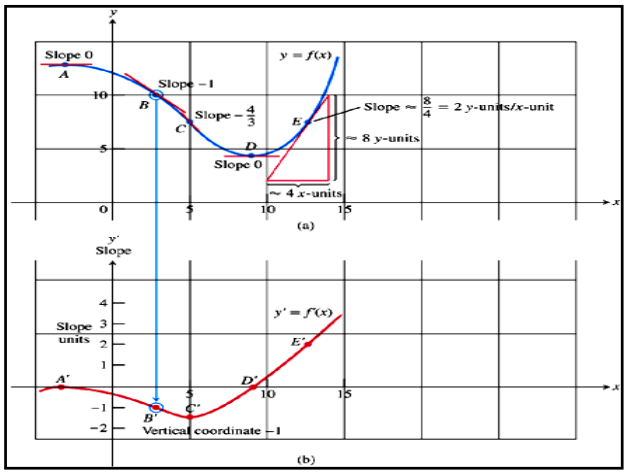
สังเกตได้ว่ากราฟของฟังก์ชันมีการหักมุม (corner) และไม่มีเส้นสัมผัสที่จุดดังกล่าว

การเขียนกราฟของ f'

(Graphing f' from Estimated Values)

เราสามารถเขียนกราฟอนุพันธ์ของ f จากค่าโดยประมาณของความชันของ f นั้น ดังตัวอย่าง





จากกราฟ $f'(x)$ จะสามารถสังเกตสิ่งต่างๆ ต่อไปนี้

1. ช่วงที่อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เป็นบวก ลบ หรือศูนย์
2. สามารถประมาณขนาดของการเปลี่ยนแปลงที่ x ใดๆ และเอามาเทียบกับขนาดของ $f(x)$
3. ทราบว่าตำแหน่งที่อัตราการเปลี่ยนแปลงกำลังเพิ่มขึ้นหรือกำลังลดลง

ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ทฤษฎีบทที่ 1 การหาอนุพันธ์ได้บ่งบอกถึงความต่อเนื่อง

ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ $x = c$ แล้ว f ย่อมต่อเนื่องที่ $x = c$

คุณสมบัติค่าระหว่างกลางของอนุพันธ์

ทฤษฎีบทที่ 2 คุณสมบัติค่าระหว่างกลางของอนุพันธ์

ถ้า a และ b เป็นจุดใดๆ 2 จุดในช่วงที่ f หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น f' จะมีค่าได้ทุกค่าระหว่าง $f'(a)$ กับ $f'(b)$

อนุพันธ์อันดับสองและอันดับสูงขึ้นไป

อนุพันธ์อันดับสอง $$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

อนุพันธ์อันดับสาม $$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

อนุพันธ์อันดับ n $$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \cdots\cdots = \frac{d^ny}{dx^n}$$

อนุพันธ์คืออัตราการเปลี่ยนแปลง

จะศึกษาการประยุกต์ใช้อนุพันธ์เพื่อเป็นแบบจำลองของอัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่างๆ รอบๆ ตัวเรา

อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่ง

นิยาม อัตราการเปลี่ยนแปลงที่ขณะใดขณะหนึ่ง อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดๆ ของ f เทียบกับ x ที่ x_0 ก็คืออนุพันธ์

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ ต้องมี limit

ตัวอย่าง พื้นที่ของวงกลมกับเส้นผ่าศูนย์กลาง

ความสัมพันธ์ของพื้นที่วงกลมกับเส้นผ่าศูนย์กลาง คือ $A = \frac{\pi D^2}{4}$ จงหาว่าพื้นที่จะเปลี่ยนไปเร็วแค่ไหนเมื่อเทียบกับเส้นผ่าศูนย์กลางในขณะที่เส้นผ่าศูนย์กลางเท่ากับ 10 เมตร

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่เทียบกับเส้นผ่าศูนย์กลาง คือ อนุพันธ์ของ A เทียบกับ D จะได้ $\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4}(2D) = \frac{\pi D}{2}$

ขณะที่ D = 10 เมตร พื้นที่จะเปลี่ยนแปลงในอัตรา $(\pi / 2)10 = 5\pi$ ตารางเมตร/เมตร

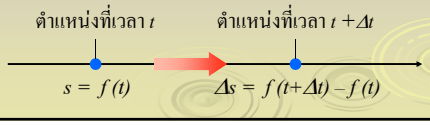
การเคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรง : การกระจัด ความเร็ว อัตราเร็ว ความเร่ง และ jerk

วัตถุเคลื่อนที่ตามพิกัดที่กำหนด จะได้ความสัมพันธ์ของระยะทางเป็นฟังก์ชันของเวลา คือ

$$s = f(t)$$

ดังนั้นการเคลื่อนที่ ในช่วงเวลา t ถึง $t + \Delta t$ คือ

$$\Delta s = f(t+\Delta t) - f(t)$$



จาก นิยามของความเร็วเฉลี่ย

$$v_{av} = \frac{displacement}{travel\ time} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

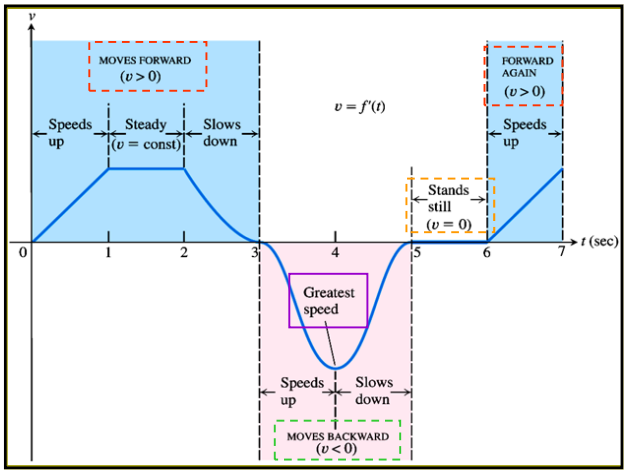
นิยาม (Instantaneous) Velocity
ความเร็ว (ขณะใดๆ) เป็นอนุพันธ์ของตำแหน่งเทียบกับเวลา ถ้าตำแหน่งของวัตถุที่เวลา t เป็น $s = f(t)$ แล้วความเร็วของวัตถุที่เวลา t คือ

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ทั้งความเร็วเฉลี่ย และ ความเร็วขณะใดๆ (velocity) จะระบุทิศทางของการเคลื่อนที่ ดังนั้นจะมีค่าได้ทั้งบวกและลบ

นิยาม อัตราเร็ว (speed)
อัตราเร็วเป็นค่าสัมบูรณ์ของความเร็ว นั่นคือ

$$\text{อัตราเร็ว} = |v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$



นิยาม ความเร่ง และ jerk

ความเร่ง (acceleration) เป็นอนุพันธ์ของความเร็วเทียบกับเวลา ถ้าตำแหน่งของวัตถุที่เวลา t เป็น $s = f(t)$ แล้วความเร่งของวัตถุที่เวลา t คือ

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

jerk เป็นอนุพันธ์ของความเร่งเทียบกับเวลา

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3 s}{dt^3}$$

จากการทดลองของกาลิเลโอ ระยะที่วัตถุที่ตกอย่างอิสระใกล้ผิวโลกจะมีความสัมพันธ์กับเวลาคือ

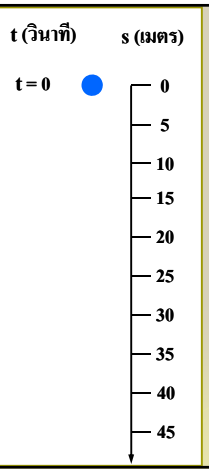
$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

หน่วยอังกฤษ:

$$g = 32 \text{ ft/sec}^2,\ s = \frac{1}{2}(32)t^2 = 16t^2$$

หน่วยเมตริก:

$$g = 9.8 \text{ m/sec}^2,\ s = \frac{1}{2}(9.8)t^2 = 4.9t^2$$

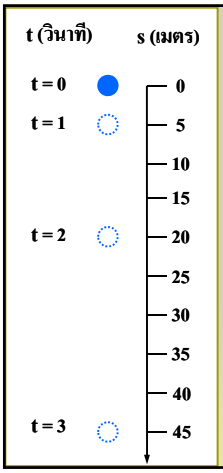


ตัวอย่าง การจำลองการตกอย่างอิสระ

ลูกบอลตกอย่างอิสระจากสภาพหยุดนิ่งที่ $t = 0$ วินาที

(a) จงหาระยะทางที่ลูกบอลตกภายใน 2 วินาทีแรกเป็นเมตร

(b) จงหาความเร็ว อัตราเร็ว และความเร่ง ขณะนั้นเป็นเท่าใด

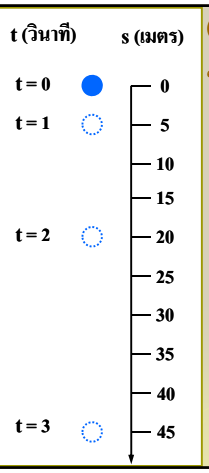


(a) ระยะทางที่บอลตกใน 2 วินาที แรก

จาก $s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}(9.8)t^2 = 4.9t^2$

แทนค่า t = 2 จะได้

$s = 4.9(2)^2 = 19.6$ เมตร



(b) ความเร็ว อัตราเร็ว และความเร่ง ขณะ 2 วินาที

ความเร็ว ณ t = 2 วินาที

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}\left(4.9t^2\right) = 9.8t$$

$v(2) = 9.8(2) = 19.6$ เมตร/วินาที ↓

อัตราเร็ว คือ $|v(2)| = 19.6$ m/s

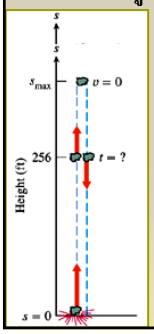
ความเร่ง ที่เวลา t ใดๆ คือ

$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9.8 \text{ m/s}^2$

ที่ t = 2, ความเร่งคือ 9.8 m/s^2

ตัวอย่าง การจำลองการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง

ดินระเบิดดันหินขึ้นด้วยความเร็วเริ่มต้น 160 ft /sec ดังรูป หินขึ้นถึงความสูง $s = 160t - 16t^2$ ft หลังจาก t วินาที จงหา



(a) หินจะขึ้นได้สูงสุดเท่าใด

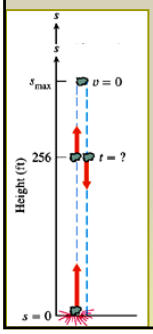
(b) ความเร็วและอัตราเร็วของหิน ขณะที่สูงจากพื้นดิน 256 ft ตอนเคลื่อนที่ขึ้น และตอนเคลื่อนที่ลง

(c) ความเร่งของหินที่เวลาใดๆ หลังจากถูกระเบิด

(d) เวลาที่หินตกกระทบพื้นดินอีกครั้งหนึ่ง

(a) หินจะขึ้นได้สูงสุดเท่าใด

ให้ s เป็นความสูงขึ้นไปจากพื้นดิน ดังนั้น ขาขึ้น v เป็น + และ v เป็น - ในขาลง จะได้ว่า ตอนหินขึ้นถึงจุดสูงสุด(s_{max}) ค่า $v = 0$



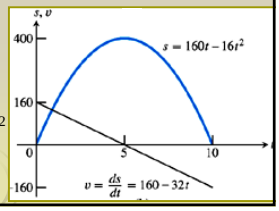
$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(160t - 16t^2) = 160 - 32t = 0$$

$t = 5$ sec

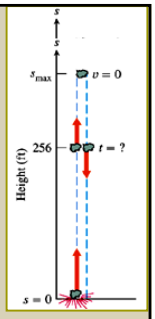
$s_{max} = s(5)$

$= 160(5) - 16(5)^2$

$s_{max} = 400$ ft



(b) ความเร็วและอัตราเร็วขณะที่ s = 256 ft ตอนเคลื่อนที่ขึ้น และ ลง

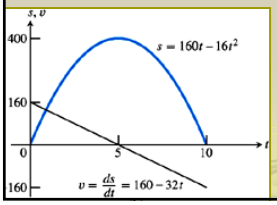


จาก $s(t) = 160t - 16t^2 = 256$

$16t^2 - 160t + 256 = 0$

$16(t^2 - 10t + 16) = 0$

$(t-2)(t-8) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2\text{sec}, t = 8\text{sec}$



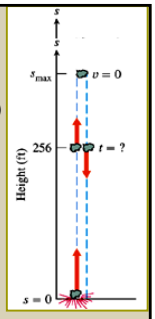
ความเร็วที่ s = 256 ft

v(2) = 160-32(2) = 96 ft/s (ทิศขึ้น)

v(8) = 160-32(8) = -96 ft/s (ทิศลง)

อัตราเร็วที่ s = 256 ft คือ 96 ft/s

(c) ความเร่ง ณ เวลาใดๆ



$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(160 - 32t) = -32$ ft/s^2 (ทิศลง)

ก็คือค่า ความเร่งโน้มถ่วงของโลก, g

(d) เวลาที่หินตกกระทบพื้นดิน

หินจะตกกระทบพื้นดิน เมื่อ s = 0

$160t - 16t^2 = 0$

$16t(10 - t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0\text{sec}, t = 10\text{sec}$

ที่ t = 0 คือตอนเริ่มระเบิด แล้วหินจะเคลื่อนที่ขึ้น และตกลงพื้นอีกครั้ง เมื่อ t = 10 วินาที

ความไวต่อการเปลี่ยนแปลง (Sensitivity to Change)

เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อย ใน x ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างมากในค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เรา เรียกว่า ฟังก์ชันมีความไวต่อการเปลี่ยนแปลงใน x

ซึ่งตัววัดความไว คือ ค่าอนุพันธ์ $f'(x)$ นั้นเอง

อนุพันธ์ของผลคูณ ผลหาร และเลขยกกำลังติดลบ

ผลคูณ (Products)

อนุพันธ์ของผลคูณไม่ใช่ผลคูณของอนุพันธ์ เช่น

$\frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ ไม่ใช่ $\frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1$

ผลหาร (Quotients)

อนุพันธ์ของผลหารไม่ใช่ผลหารของอนุพันธ์

เลขยกกำลังติดลบ (Negative Integer Powers of x)

ใช้กฎยกกำลังเหมือนกับของเลขยกกำลังบวก

อนุพันธ์ของผลคูณ (Derivative Product Rule)

กฎข้อที่ 5 อนุพันธ์ของผลคูณ

ถ้า u และ v หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว อนุพันธ์ของผลคูณ uv ยอมหาได้เป็น

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

อนุพันธ์ของผลหาร (Derivative Quotient Rule)

กฎข้อที่ 6 อนุพันธ์ของผลหาร

ถ้า u และ v หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $v(x) \neq 0$ แล้ว อนุพันธ์ของผลหารยอมหาได้เป็น

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

เลขยกกำลังติดลบ (Negative Integer Powers of x)

กฎข้อที่ 7 กฎยกกำลังสำหรับเลขจำนวนเต็มลบ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มลบ และ $x \neq 0$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

พิสูจน์ อนุพันธ์ของผลคูณ

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{[v(x+h)-v(x)]}{h}+v(x)\frac{[u(x+h)-u(x)]}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}u(x+h).\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+\lim_{h\to 0}v(x).\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

$$= u(x)\frac{dv(x)}{dx}+v(x)\frac{du(x)}{dx}$$

พิสูจน์ อนุพันธ์ของผลหาร

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h)-v(x)u(x)+v(x)u(x)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{v(x)\frac{[u(x+h)-u(x)]}{h}-u(x)\frac{[v(x+h)-v(x)]}{h}}{v(x+h)v(x)}\right]$$

$$= \frac{v(x)\frac{du(x)}{dx}-u(x)\frac{dv(x)}{dx}}{[v(x)]^2}$$

พิสูจน์ อนุพันธ์ของกฎยกกำลังของ I⁻

ให้ n = -m โดยที่ m เป็น I^+ ใช้กฎผลหารจะได้

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{x^m\frac{d}{dx}(1)-1\frac{d}{dx}(x^m)}{(x^m)^2}$$

$$= \frac{0-mx^{m-1}}{x^{2m}}$$

$$= -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$

❖เลือกใช้กฎอะไร กฎผลหาร และผลคูณ ???

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^4} = x^{-1}-3x^{-2}+2x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2}-3(-2)x^{-3}+2(-3x^{-4})$$

$$= -\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}$$

ตัวอย่าง ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ x และ

$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0$

$v(1) = 5, \quad v'(1) = -1$

จงหาค่าของอนุพันธ์ต่อไปนี้ที่ x = 1

(a) $\frac{d}{dx}(uv)$ (b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$

(c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)$ (d) $\frac{d}{dx}(7v-2u)$

(a) -2 (b) 2/25 (c) -1/2 (d) -7

อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(Derivatives of Trigonometric Functions)

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

พิสูจน์

$y(x) = \sin x: \quad y(x+h) = \sin(x+h) = \sin x\cosh + \cos x\sinh$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cosh + \cos x\sinh - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cosh-1)}{h} + \lim_{h\to 0}\cos x\frac{\sinh}{h}$$

$$= \sin x\lim_{h\to 0}\frac{(\cosh-1)}{h} + \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}$$

$$= \sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 \quad = \cos x$$

พิสูจน์

$y(x) = \cos x: \quad y(x+h) = \cos(x+h) = \cos x\cosh - \sin x\sinh$

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cosh - \sin x\sinh - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cosh-1) - \sin x\sinh}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos x\frac{(\cosh-1)}{h} - \lim_{h\to 0}\sin x\frac{\sinh}{h}$$

$$= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cosh-1}{h} - \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}$$

$$= \cos x\cdot 0 - \sin x\cdot 1 \quad = -\sin x$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cosh-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h - 1}{h(\cosh+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h(\cosh+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}\cdot\frac{\sinh}{(\cosh+1)}$$

$$= 1\cdot 0 = 0$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณ

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad and \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\cot x$$

ตัวอย่าง จงหา อนุพันธ์อันดับสอง, y" ของ y = sec x

$y = \sec x$

$y' = \sec x \tan x$

$$y'' = \frac{d(\sec x\tan x)}{dx} = \sec x\frac{d(\tan x)}{dx} + \tan x\frac{d(\sec x)}{dx}$$

$$= \sec x\sec^2 x + \tan x(\sec x\tan x)$$

$$= \sec^3 x + \sec x\tan^2 x$$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(Continuity of Trigonometric Functions)

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติพื้นฐานทั้งหกหาอนุพันธ์ได้ทั่วโดเมน ของมัน มันจึงต่อเนื่องทั่วโดเมนของมัน

ดังนั้น sin x และ cos x ต่อเนื่องสำหรับทุก x

sec x และ tan x ต่อเนื่องทุก x ยกเว้นที่ n $\frac{\pi}{2}$

csc x และ cot x ก็ต่อเนื่อง ยกเว้นที่ n π

สำหรับแต่ละฟังก์ชัน $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ทุกแห่งที่มี $f(c)$

ดังนั้นเราจึงสามารถคำนวณลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่างๆ ได้ โดยการแทนค่าโดยตรง

กฎลูกโซ่และสมการอิงตัวแปรเสริม
(The Chain Rule and Parametric Equations)

อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ (Derivative of Composite Function)

ฟังก์ชันประกอบ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ คือ ฟังก์ชันซ้อนฟังก์ชัน ซึ่งทำให้การหาอนุพันธ์ค่อนข้างยุ่งยาก เราจึงจำเป็นต้องมีกฎสำคัญเพื่อช่วยให้หาอนุพันธ์ได้ง่ายขึ้น เรียกว่า กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

ทฤษฎีบทที่ 3 กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)

ถ้า f(u) หาอนุพันธ์ได้ที่จุด u = g (x) และ g (x) หาอนุพันธ์ได้ที่จุด x แล้ว ฟังก์ชันซ้อนหรือฟังก์ชันประกอบ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ย่อมหาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

นั่นคือ ถ้าให้ y = f(u) และ u = g (x) ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = 9x^4 + 6x^2 + 1$

วิธีทำ $y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$

ให้ $u = 3x^2 + 1$ ดังนั้น $y = u^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \frac{dy}{du} = 2u; \quad \frac{du}{dx} = 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2u \cdot 6x = 2(3x^2 + 1) \cdot 6x$$
$$= 36x^3 + 12x$$

กฎ "ข้างนอก-ข้างใน" ("Outside-Inside" Rule)

เราอาจจะคิดเรื่องกฎลูกโซ่ในแง่ต่อไปนี้

ถ้า $y = f(g(x))$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

อาจกล่าวได้ว่าเป็นการแยกหาอนุพันธ์ฟังก์ชัน f ข้างนอกก่อน โดยปล่อยฟังก์ชัน g (x) ไว้ แล้วจึงคูณกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ข้างใน g'(x) อีกครั้ง

$$\frac{d}{dx} \underbrace{f}_{\text{ข้างนอก}} \underbrace{(g(x))}_{\text{ข้างใน}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{อนุพันธ์} \\ \text{ข้างนอก}}} \underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{ปล่อย} \\ \text{ข้างในไว้}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{อนุพันธ์} \\ \text{ข้างใน}}}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$

$$g'(t) = \frac{d}{dt}(\tan(5 - \sin 2t))$$
$$= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \frac{d}{dt}(5 - \sin 2t)$$
$$= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \left(0 - \cos 2t \cdot \frac{d(2t)}{dt}\right)$$
$$= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2$$
$$= -2(\cos 2t)\sec^2(5 - \sin 2t)$$

ความชันของโค้งตัวแปรเสริม
(Slopes of Parametrized Curves)

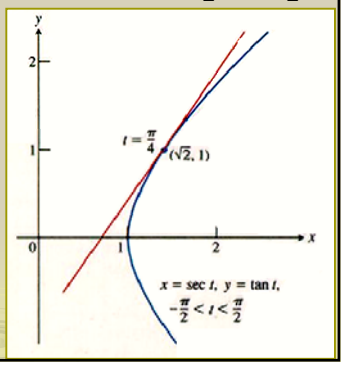
โค้งตัวแปรเสริม (x (t), y (t)) หาอนุพันธ์ได้ที่ t ถ้า x และ y หาอนุพันธ์ได้ที่ t เราเรียก **t ว่าตัวแปรเสริม (parameter)**

อนุพันธ์ dy/dt, dx/dt และ dy/dx มีความเกี่ยวข้องกันตามกฎลูกโซ่ดังนี้ $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ โดยที่ $\frac{dx}{dt} \neq 0$

ตัวอย่าง จงหาเส้นสัมผัสกับ hyperbola ขวามือ ที่มีสมการอิงตัวแปรเสริมเป็น $x = \sec t,\ y = \tan t,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ ที่จุด $(\sqrt{2},1)$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{4}$

ส่วนของ hyperbola หา อนุพันธ์ได้ทุกจุด ยกเว้นจุด (1, 0)



วิธีทำ อนุพันธ์ในสมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ หาค่าได้ โดย

$\frac{dx}{dt} = \sec t \tan t \neq 0$ OK และ $\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} = \csc t$

ที่ $t = \frac{\pi}{4}$ จะได้ว่า $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \csc\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

สมการของเส้นสัมผัส ที่จุด $(\sqrt{2},1)$ คือ

$y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})$ จัดรูปเป็น $y = \sqrt{2}x - 1$

ทำนองเดียวกัน ถ้าต้องการหา อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชันนี้จะได้ว่า

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

โดยที่ $\frac{dx}{dt} \neq 0;\ y' = \frac{dy}{dx}$

จะได้ว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \csc t$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{d\csc t/dt}{d\sec t/dt} = \frac{-\csc t \cot t}{\sec t \tan t} = -\cot^3 t$$

กฎลูกโซ่ยกกำลัง (Power Chain Rule)

จากกฎลูกโซ่ $\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

ถ้า $f(u) = u^n$ จะได้

$$\frac{df(u)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่าความชันของทุกเส้นสัมผัสกับโค้ง $y = 1/(1-2x)^3$ เป็นบวก

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1-2x)^{-3}$$
$$= -3(1-2x)^{-4} \cdot \frac{d}{dx}(1-2x)$$
$$= -3(1-2x)^{-4} \cdot (-2)$$
$$= \frac{6}{(1-2x)^4}$$

ซึ่งเป็นบวกเสมอทุกค่า x ยกเว้นที่ x = 1/2

การหาอนุพันธ์โดยปริยาย (Implicit Differentiation)

ใช้ในกรณีที่หา $y = f(x)$ ได้ยาก เช่น กรณีที่ x และ y แยกจากกันได้ยาก $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ ฯลฯ

วิธีการคือหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับ x แล้วค่อยหา $\frac{dy}{dx}$ ในเทอมของ x และ y ด้วยกัน

ตัวอย่าง จงหา $\frac{dy}{dx}$ ถ้า $y^2 = x$

วิธีทำ โดยปกติเราจะหา $y = f(x)$ นั่นคือ $y = \pm\sqrt{x}$ ซึ่งแยกเป็น $y_1 = \sqrt{x}$ และ $y_2 = -\sqrt{x}$ ซึ่งหาอนุพันธ์แต่ละฟังก์ชันได้เป็น

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{และ} \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ถ้าเราใช้วิธีโดยปริยายจะได้จากการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ x

ใช้วิธีโดยปริยายจะได้จากการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ x เป็นดังนี้

$$y^2 = x$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{อนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \qquad \text{แทนค่า } y = \pm\sqrt{x}$$

ก็จะได้เหมือนกันคือ $\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ และ $\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ตัวอย่าง จงแสดงว่าจุด (2, 4) อยู่บนโค้ง $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ แล้วหาเส้นสัมผัสและเส้นตั้งฉากกับโค้งที่จุดดังกล่าว

วิธีทำ จุด (2, 4) จะอยู่บนโค้ง เมื่อแทนค่า x = 2, y = 4 ในสมการแล้วเป็นจริง ดังนั้น $(2)^3 + (4^3) - 9(2)(4) = 0$ แสดงว่า จุด (2, 4) อยู่บนโค้งนี้จริง

ต่อไปจะหาความชันของโค้ง จากอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย ซึ่งจะได้จากการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับx

อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย ของ $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ จะได้ ว่า

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 9\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) = 0$$

$$(3y^2 - 9x)\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 9y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$

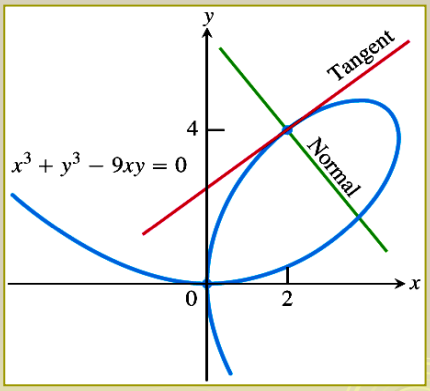
ดังนั้น ความชันที่จุด (2, 4) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{4}{5}$

เส้นสัมผัสโค้งที่ (2, 4) และมีความชัน 4/5 ซึ่งคือ

$$y - 4 = \frac{4}{5}(x - 2) \quad \text{หรือ} \quad y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

เส้นตั้งฉากกับโค้งที่ (2, 4) และมีความชัน -5/4 ซึ่งคือ

$$y - 4 = -\frac{5}{4}(x - 2) \quad \text{หรือ} \quad y = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}$$



ผลคูณของ Slope สองเส้นที่ตั้งฉากกัน จะมีค่า เท่ากับ -1

ตัวอย่าง จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ถ้า $2x^3 - 3y^2 = 8$

วิธีทำ หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2 - yy' = 0$$

$y' = \frac{x^2}{y}$ เมื่อ $y \neq 0$

ใช้กฎผลหารหา y'' จะได้

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{y(2x) - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\cdot y'$$

แทนค่า $y' = \frac{x^2}{y}$ จะได้

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}$$ เมื่อ $y \neq 0$

อัตราสัมพันธ์ (Related Rates)

สมมุติว่าอนุภาค P(x, y) กำลังเคลื่อนที่ไปตามโค้ง C โดยที่พิกัด x และ y จะเป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ของเวลา t ถ้า D คือระยะห่างจากจุดกำเนิด ด้วยกฎลูกโซ่เราสามารถหาสมการที่สัมพันธ์กันของ dD/dt, dx/dt และ dy/dt ได้ดังนี้

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}\left(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\right)$$

ฟังก์ชันใดๆ ที่ประกอบด้วยตัวแปรสองตัวแปรหรือมากกว่าที่เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้เมื่อเทียบกับ t สามารถใช้เพื่อหาสมการที่สัมพันธ์กันกับอัตราที่เกี่ยวข้องได้

ตัวอย่าง สมมุติ กรวยมีรัศมี r และความสูง h เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของเวลา t และ V เป็นปริมาตรของกรวย จงหาสมการความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dV}{dt}, \frac{dr}{dt}$, และ $\frac{dh}{dt}$

วิธีทำ จากสูตรปริมาตรกรวย

$$V = \frac{1}{3}\times \text{พื้นที่หน้าตัด} \times \text{สูง} = \frac{\pi}{3}r^2h$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้างโดยปริยาย จะได้

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left(r^2\cdot\frac{dh}{dt} + 2r\frac{dr}{dt}\cdot h\right) = \frac{\pi}{3}\left(r^2\frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right)$$

ขั้นตอนการแก้ปัญหาอัตราสัมพันธ์

ขั้นที่ 1 เขียนรูป กำหนดตัวแปรและค่าคงที่ที่เกี่ยวข้อง

ขั้นที่ 2 เขียนสมการความสัมพันธ์ของตัวแปร และค่าคงที่ต่างๆ

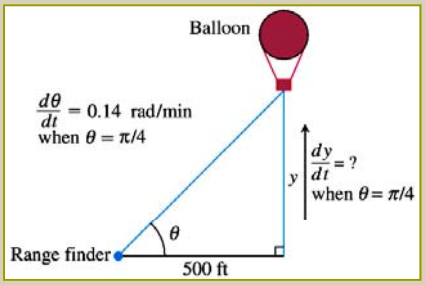
ขั้นที่ 3 หาอนุพันธ์เทียบกับ t โดยปริยายทั้งสองข้างของสมการ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราต่างๆ

ขั้นที่ 4 แทนค่าอัตราที่รู้รวมทั้งค่าที่รู้ทั้งหมดเพื่อหาอัตราที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 3 บอลลูนถูกปล่อยจากพื้นราบขึ้นตรงในแนวดิ่ง ผู้สังเกตอยู่ห่างจากจุดปล่อย 500 ฟุตเพื่อทำการวัดมุมยกที่เกิดขึ้น ขณะที่มุมยกเท่ากับ $\pi/4$ มุมเพิ่มขึ้นในอัตรา 0.14 rad/นาที จงหาว่าบอลลูนลอยขึ้นไวเท่าไร ในขณะนั้น

วิธีทำ

ขั้นที่ 1: เขียนรูปดังแสดงในรูป



ให้ θ = มุมยกจากพื้น (rad) y = ความสูงของบอลลูน (ฟุต)
t = เวลา (นาที) สมมุติว่า θ และ y เป็น f ที่หา $f'(t)$ ได้
ค่าคงที่ คือระยะห่าง 500 ฟุต จากจุดปล่อย

ขั้นที่ 2: เขียนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรและค่าคงที่

$$\tan\theta = \frac{y}{500} \quad \text{หรือ} \quad y = 500\tan\theta$$

ขั้นที่ 3: หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ t ทั้งสองข้าง

$$\frac{dy}{dt} = 500(\sec^2\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

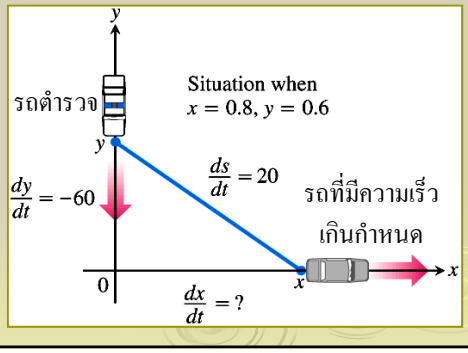
ขั้นที่ 4: แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{4}$ และ $\frac{d\theta}{dt} = 0.14$ **rad/นาที จะได้อัตราที่บอลลูนลอยขึ้น หรือ ความเร็ว ณ ขณะนั้นเป็น**

$$\frac{dy}{dt} = 500\left(\sqrt{2}\right)^2(0.14) = 140$$

ตัวอย่าง รถตำรวจกำลังวิ่งมาจากทางเหนือ เข้าหาสี่แยกมุมฉาก เพื่อไล่ตามรถที่ขับด้วยความเร็วเกินกำหนดที่เลี้ยวมาแล้ว และกำลังวิ่งไปทางทิศตะวันออก ขณะที่รถตำรวจอยู่ห่าง 0.6 ไมล์จากสี่แยก และรถที่มีความเร็วเกินกำหนดอยู่ห่าง 0.8 ไมล์จากสี่แยก ตำรวจในรถได้ใช้เรดาร์ตรวจจับระยะทางพบว่า ระยะทางระหว่างรถทั้งสองคันเพิ่มขึ้นในอัตรา 20 ไมล์/ชั่วโมง ถ้ารถตำรวจกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 60 ไมล์/ชั่วโมง ในขณะนั้น จงหาความเร็วของรถที่มีความเร็วเกินกำหนด

วิธีทำ

ขั้นที่ 1: เขียนรูปดังแสดงในรูปด้านล่าง



ให้ x = ตำแหน่งของรถที่มีความเร็วเกินกำหนดที่เวลา t
y = ตำแหน่งของรถตำรวจที่เวลา t
s = ระยะห่างระหว่างรถทั้งสองคันที่เวลา t
สมมุติ x, y, s เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ t

ขั้นที่ 2: หาความสัมพันธ์ s, x และ y ได้ว่า $s^2 = x^2 + y^2$

ขั้นที่ 3: อนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้างของสมการ

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

ขั้นที่ 4: แทนค่า $x = 0.8, y = 0.6, \frac{dy}{dt} = -60, \frac{ds}{dt} = 20$ จะได้ความเร็วของรถที่มีความเร็วเกินกำหนด หรือ $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$20 = \frac{1}{\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2}}\left(0.8\frac{dx}{dt} + 0.6(-60)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2} + (0.6)(60)}{0.8} = 70 \text{ ไมล์/ชั่วโมง}$$

ตัวอย่าง เติมน้ำเข้าไปในถังรูปกรวยหงายด้วยอัตรา 9 ลูกบาศก์ฟุต/นาที กรวยสูง 10 ฟุต และมีฐานรัศมี 5 ฟุต จงหาว่าระดับน้ำจะสูงขึ้นด้วยอัตราเท่าไรในตอนที่ระดับน้ำอยู่ที่ 6 ฟุตจากพื้นถัง

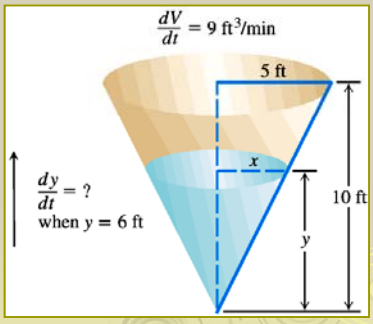
วิธีทำ ขั้นที่ 1: เขียนรูป

ให้ V = ปริมาตรของน้ำในถังที่เวลา t

x = รัศมีของผิวน้ำที่เวลา t

y = ความสูงของน้ำที่เวลา t

สมมุติให้ V, x, y เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ t ค่าคงที่คือ ขนาดของถัง



ขั้นที่ 2: จากสูตรของปริมาตรกรวย $V = \frac{\pi}{3}x^2 y$ และจากสามเหลี่ยมคล้าย $\frac{x}{5} = \frac{y}{10}$ **หรือ** $x = \frac{y}{2}$ แทนเข้าในสมการของปริมาตรจะได้

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

ขั้นที่ 3: อนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้างของสมการ

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12}\cdot 3y^2\frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2\frac{dy}{dt}$$

ขั้นที่ 4: แทนค่า $y = 6, \frac{dV}{dt} = 9$ จะได้อัตราการเพิ่มของระดับน้ำเป็น

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2\frac{dy}{dt}$$

$$9 = \frac{\pi}{4}(6)^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi(6)^2}(9) = \frac{1}{\pi} \approx 0.32 \text{ ฟุต/นาที}$$