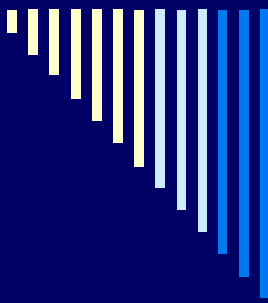

ทฤษฎีอีลาสติก
Elasticity

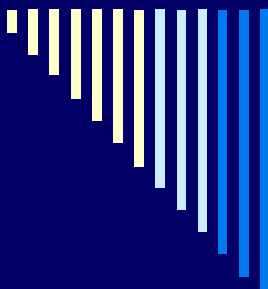
Fundamentals of Rock Mechanics

รศ. ตัดดา วรรณขาว



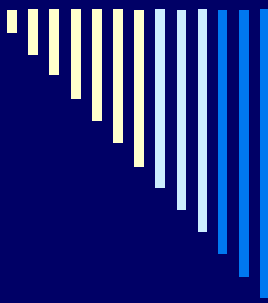
ข้อจำกัดในสมมุติฐานการใช้ทฤษฎีอีลาสติก

- วัตถุนั้นจะต้องมีการกระจายอย่างต่อเนื่อง
- ความเครียดนั้นน้อยมาก คือมีค่าน้อยกว่าค่าเป็นหนึ่ง (**unity**)
- ความเค้นและการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง จะต้องมีความต่อเนื่องตามโคออร์ดิเนต

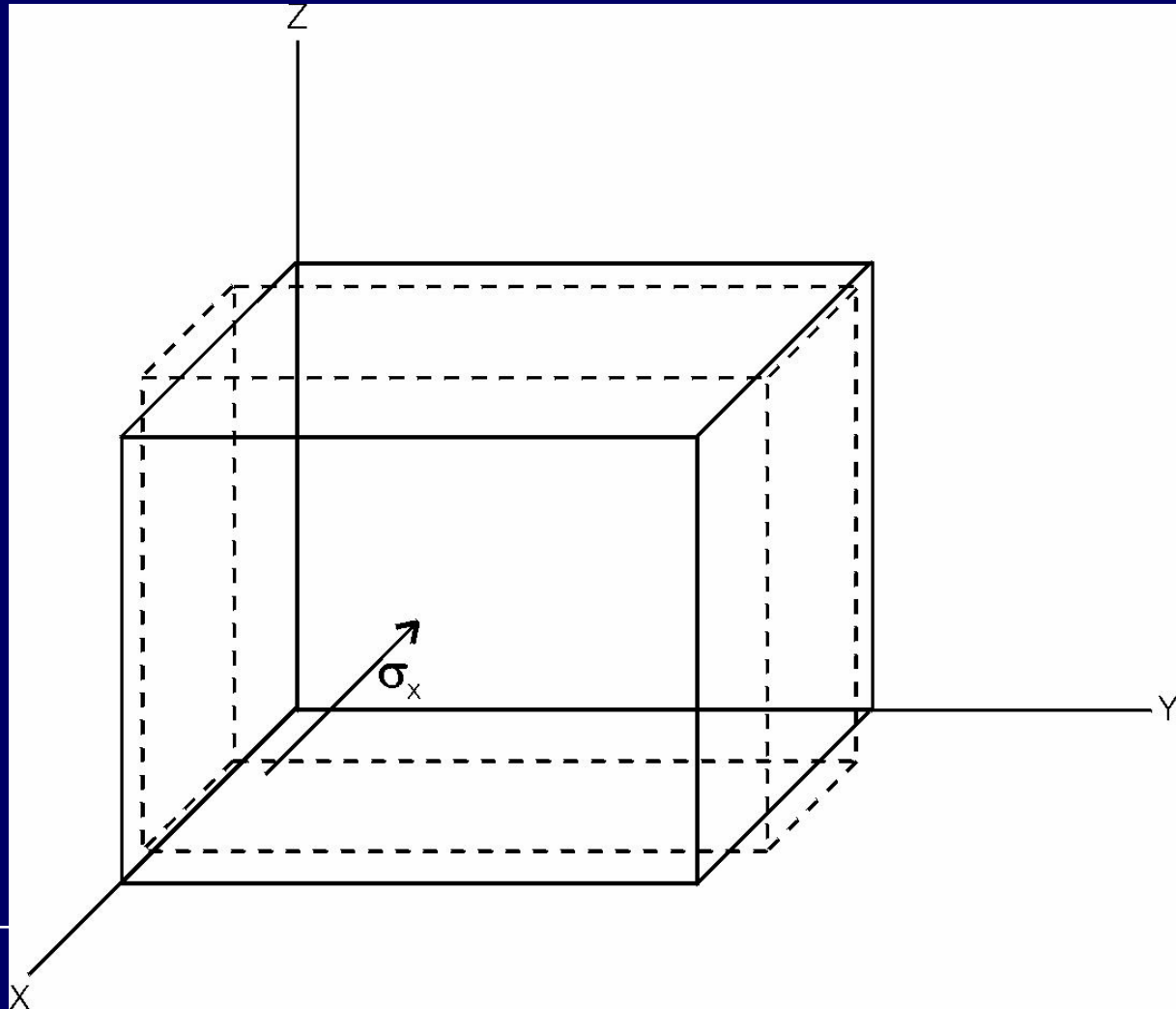


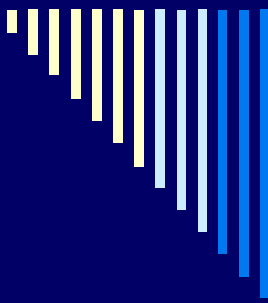
ข้อจำกัดเพิ่มเติม

- ความเค้นและความเครียดเป็นสัมพันธเชิงเส้น
(Linearity between stress and strain) นั่นคือวัตถุนั้นหากมีความเค้นมากกระทำจะเกิดความเครียดในทิศทางของความเค้นและเป็น
ปฏิภาคตรงกับความเค้นที่มากกระทำ เรียกว่ากฎของ
ฮุก (Hooke' s law)
- วัสดุมีความเป็นเนื้อเดียว (Homogeneity)
- เป็นวัตถุไอโซโทรปิก (Isotropic) คือมี
คุณสมบัติอีลาสติกเท่ากันทุกทิศทาง

- 
- มีความเป็นอีลาสติกอย่างสมบูรณ์ คือวัตถุนั้นเปลี่ยนรูปไปหากมีแรงกระทำ เมื่อไม่มีแรงกระทำวัตถุนั้นจะกลับคืนสู่สภาพเดิมทั้งขนาดและรูปร่าง
 - มีความเป็นอีลาสติกอย่างสมบูรณ์ (Elasticity) คือเมื่อไม่มีแรงมากระทำต่อวัตถุแล้ว วัตถุสามารถกลับคืนตัวได้ทั้งหมด

Deformation from σ_x



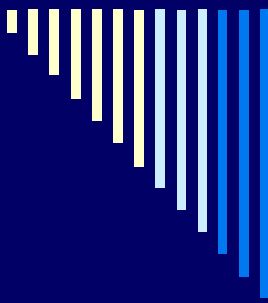


สมการความเครียดในแกน X, y, z เมื่อมีความเค้น
ในแกน X

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = \frac{-\nu \sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = \frac{-\nu \sigma_x}{E}$$



Strain from 3 applied stresses

$$\varepsilon_x = \frac{[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]}{E}$$

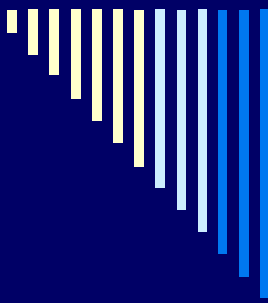
$$\varepsilon_y = \frac{[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]}{E}$$

$$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{axial}}$$

Poisson 's Ratio

$$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{axial}}$$

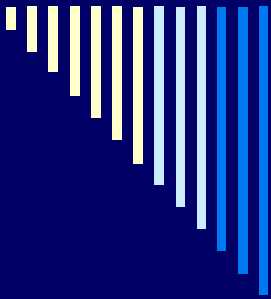


Shear strain

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

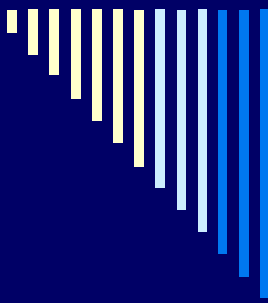
$$\gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$



$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} I_1$$



Hydrostatic stress field

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$$

$$e = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} p = \frac{p}{k}$$

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

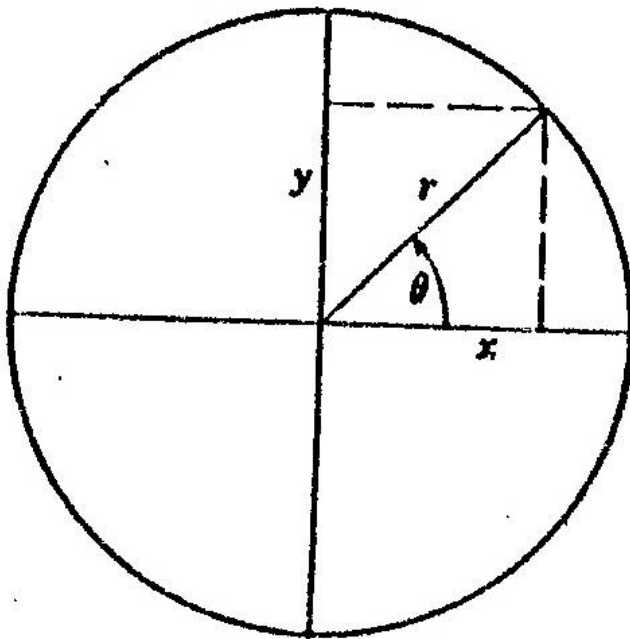
Bulk Modulus

Stress in Polar coordinate

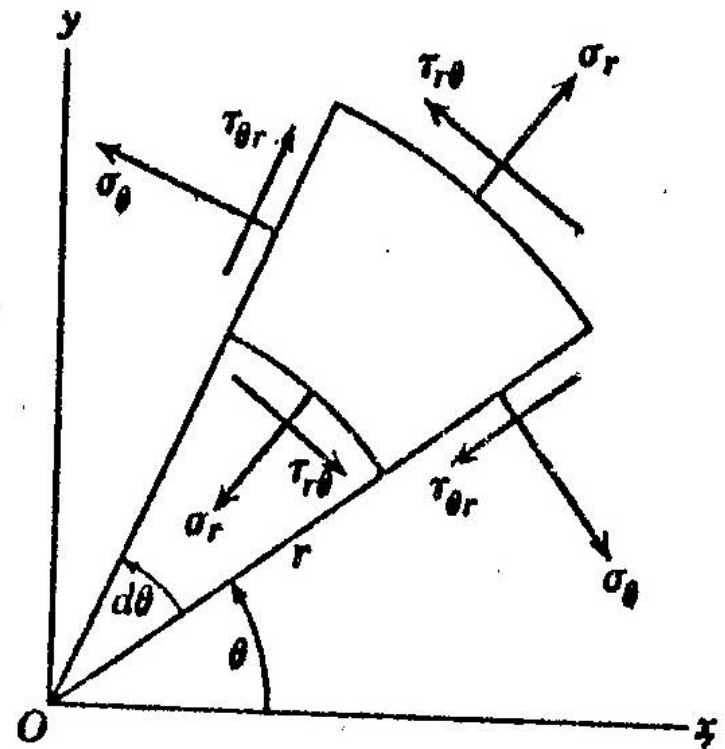
$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

(3.8.1)



(a)

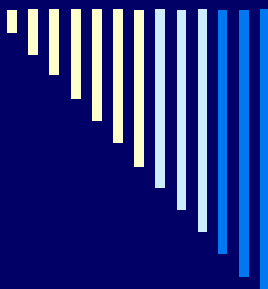


(b)

Rectangular coordinate

Rectangular Coordinates (x, y, z) Strain-Displacement Equations

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\tag{3.10.1}$$



Equilibrium of Stresses

Equilibrium Conditions for No Body Forces

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

(3.10.2)

Spherical coordinate

Spherical Coordinates (r, θ, ϕ) Strain-Displacement Equations

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

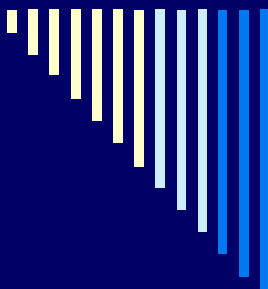
$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{\theta\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w \cot \theta}{r}$$

$$\epsilon_\phi = \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \cot \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi}$$

$$\gamma_{\phi r} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi}$$

(3.10.5)



Cylindrical Coordinate

Cylindrical Coordinates (r, θ, z) Strain-Displacement Equations

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} & \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\tag{3.10.3}$$

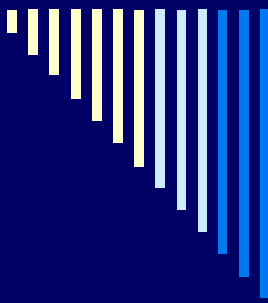
Stress equilibrium in polar coordinate

Equilibrium Conditions for No Body Forces

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

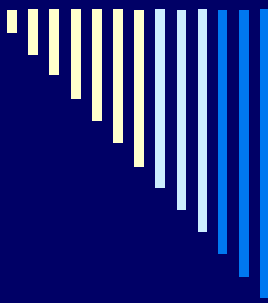
$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0 \quad (3.10.4)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} = 0$$



Stress – strain relationship 3-D

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]}{E}\end{aligned}$$

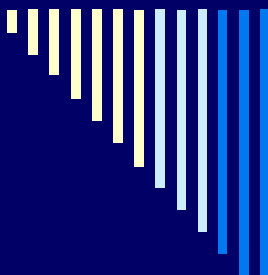


Uniaxial stress field $\sigma_z \neq 0$ $\sigma_x = 0$ $\sigma_y = 0$

$$\varepsilon_x = \frac{[-\nu(\sigma_y)]}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{[-\nu(\sigma_z)]}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{[\sigma_z]}{E}$$



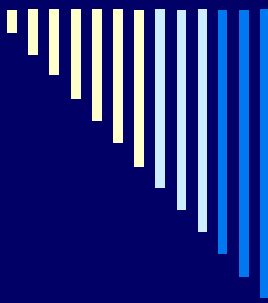
Biaxial stress field $\sigma_z=0$ $\sigma_x \neq 0$ $\sigma_y \neq 0$
Plane Stress condition

$$\varepsilon_x = \frac{[\sigma_x - \nu \sigma_y]}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{[\sigma_y - \nu \sigma_x]}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{[-\nu(\sigma_x + \sigma_y)]}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$



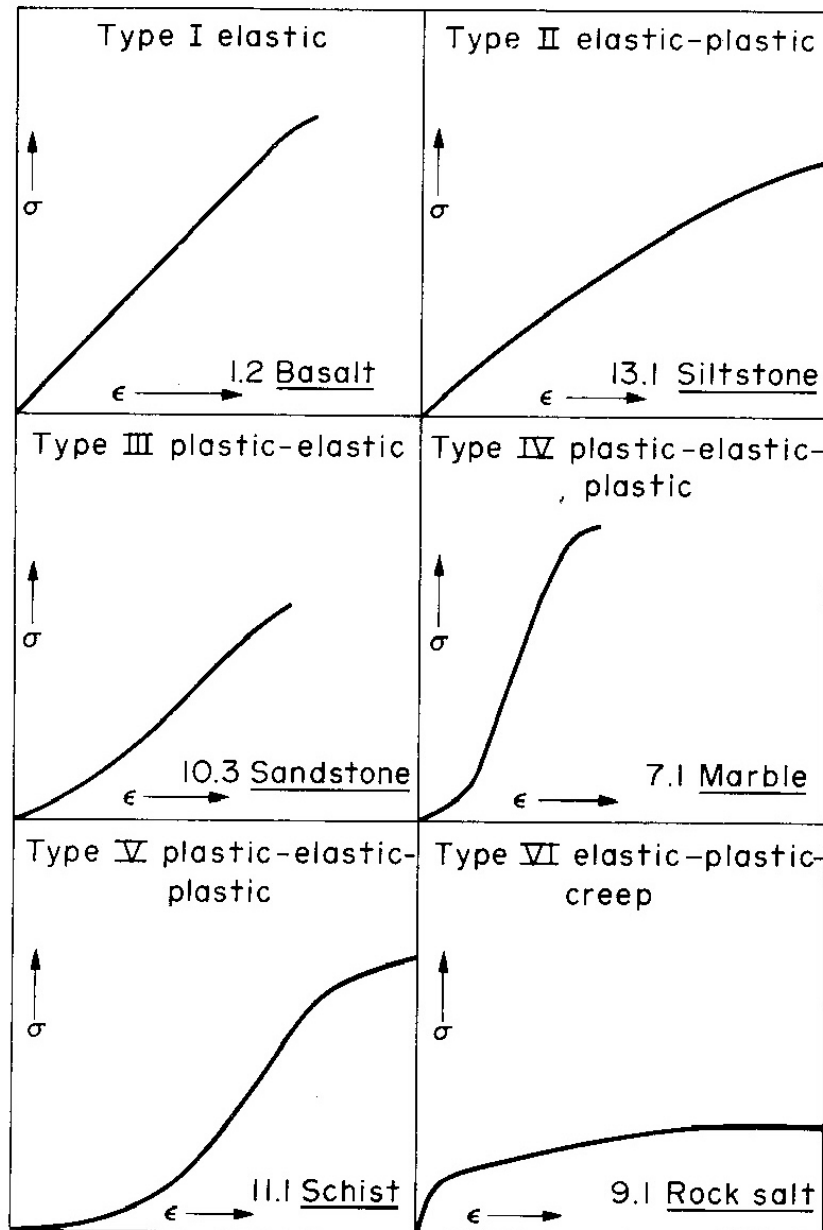
Plane strain condition,

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

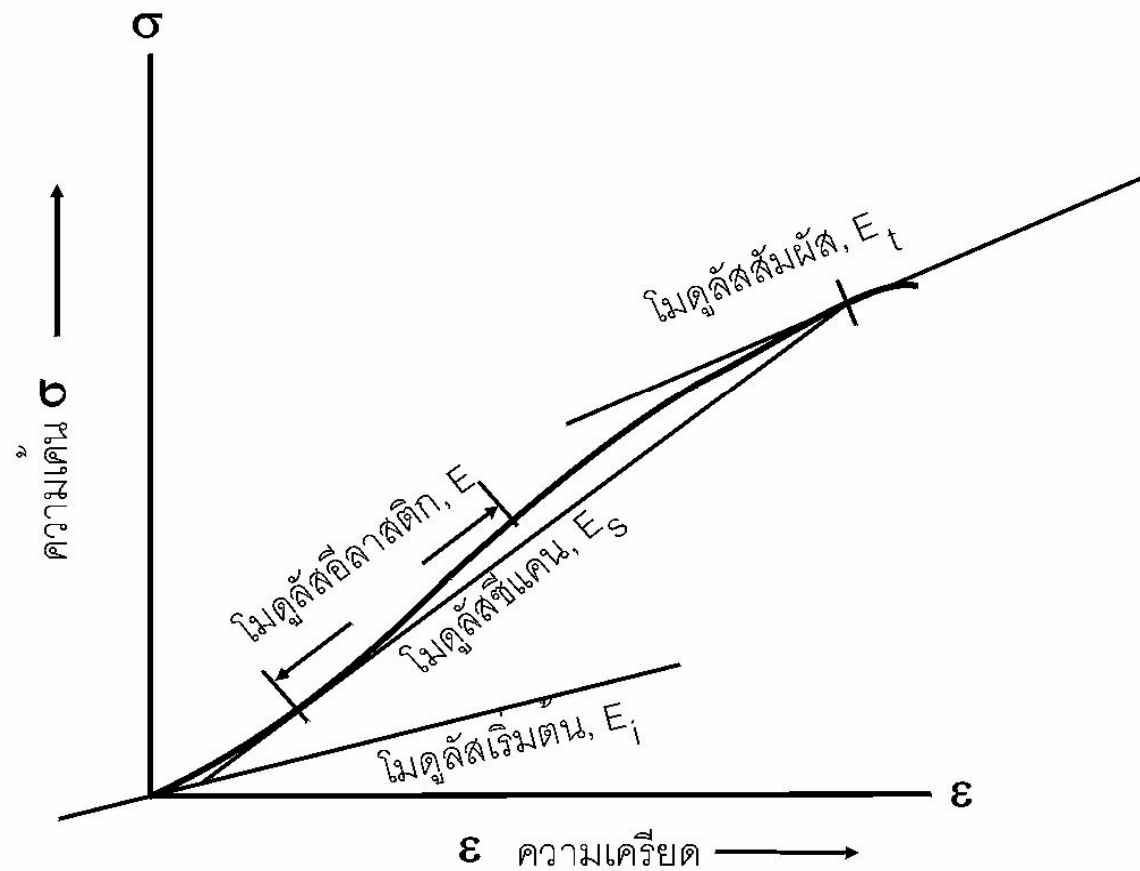
$$\varepsilon_x = \frac{[(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y]}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{[(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x]}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$



Elastic Modulus



การเปลี่ยนรูปภายใต้ความเค้นอัด

