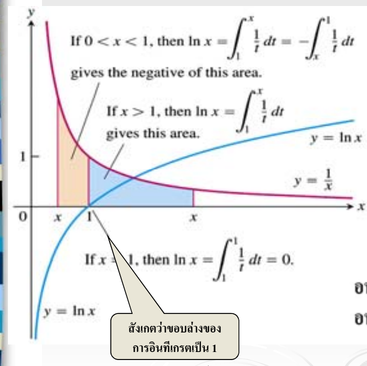
บทที่ 8 : ฟังก์ชันอดิศัย
(Transcendental Functions)

- ลอการิทึม (Logarithms)
- ฟังก์ชันยกกำลัง (Exponential Functions)
- อนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
  (Derivatives of Inverse Trigonometric Function; Integrals)
- ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิค (Hyperbolic Functions)

ลอการิทึมธรรมชาติ (The Natural Logarithm Function)



กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง 1/x กับ ln x

นิยาม

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0$$

$\ln x$

อนุพันธ์อันดับ 1 เป็นบวก

อนุพันธ์อันดับ 2 เป็นลบ (เว้าลง)

อนุพันธ์ของ $y = \ln x$

จากทฤษฎีมูลฐาน (fundamental theorem)

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{d}{du}\ln u\,\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 1 อนุพันธ์ของ Natural Logarithms

a) $\frac{d}{dx}\ln 2x = \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(2x) = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}$

b) $\frac{d}{dx}\ln(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\frac{d}{dx}(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}(2x)$
$= \frac{2x}{x^2+3}$

ข้อสังเกต

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{x}$$

กฎของ Logarithms

สำหรับทุก $a > 0$ และ $x > 0$

1. $\ln ax = \ln a + \ln x$
2. $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
3. $\ln x^n = n \ln x$

ปริพันธ์ของ $\frac{1}{u}du$

จากนิยามของ ln x จะได้ว่า

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C, \quad u > 0$$

ในกรณีที่ u < 0

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{1}{(-u)}\,d(-u) = \ln(-u) + C$$

ดังนั้น

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

ตัวอย่างที่ 2

$$\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\,dx = \int_{-5}^{-1} \frac{1}{u}\,du = \ln|u|\Big|_{-5}^{-1}$$
$$= \ln|-1| - \ln|-5|$$
$$= \ln 1 - \ln 5$$
$$= -\ln 5$$

$u = x^2 - 5$
$du = 2x\,dx$
$u(0) = -5$
$u(2) = -1$

ตัวอย่างที่ 3

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\cos\theta}{3+2\sin\theta}\,d\theta = \int_1^5 \frac{2}{u}\,du$$
$$= 2\ln|u|\Big|_1^5$$
$$= 2\ln|5| - 2\ln|1|$$
$$= 2\ln 5$$

$u = 3 + 2\sin\theta$
$du = 2\cos\theta\,d\theta$
$u(-\pi/2) = 1$
$u(\pi/2) = 5$

ปริพันธ์ของ $\tan(x)$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-du}{u}$$
$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$
$$= -\ln|\cos x| + C$$
$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x| + C$$

ปริพันธ์ของ $\cot(x)$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{du}{u}$$
$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$
$$= \ln|\sin x| + C$$
$$= -\ln\left|\frac{1}{\sin x}\right| + C = -\ln|\csc x| + C$$

สรุป ปริพันธ์ของ $\tan(u)$ และ $\cot(u)$

$$\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc u| + C$$

ตัวอย่างที่ 4 $\int_0^{\pi/6} \tan 2x\,dx$

$u = 2x$
$dx = \frac{du}{2}$
$u(0) = 0$
$u(\pi/6) = \pi/3$

$$\int_0^{\pi/6} \tan 2x\,dx = \int_0^{\pi/3} \tan u \frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \tan u\,du = \frac{1}{2}\ln|\sec u|\Big]_0^{\pi/3}$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

Logarithmic Differntial

❖ ในบางครั้งการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันทำได้ยาก โดยเฉพาะกรณีฟังก์ชันที่มีทั้งผลคูณและผลหารรวมกัน ดังนั้นเราจะทำการจัดรูปฟังก์ชันใหม่โดยการ take ln เข้าไปในสมการ

ตัวอย่างที่ 5 การหาอนุพันธ์โดยการใช้ Logarithm

จงหา $\frac{dy}{dx}$ $\quad y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}, \quad x > 1$

$$\ln y = \ln\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}$$
$$= \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x+3) - \ln(x-1)$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}\left(\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x+3) - \ln(x-1)\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2(x+3)} - \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2(x+3)}-\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2(x+3)}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$=\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2(x+3)}-\frac{1}{x-1}\right)$$

อนุพันธ์ของ $\log_a u$

เปลี่ยนไปอยู่ในรูป natural logarithm ก่อน

$$\frac{d}{dx}(\log_a u)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right)$$

$$=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{d}{dx}(\ln u)$$

$$=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 6

$$\frac{d}{dx}\log_{10}(3x+1)\;=\frac{1}{\ln 10}\frac{1}{3x+1}\frac{d}{dx}(3x+1)=\frac{3}{(3x+1)\ln 10}$$

ตัวอย่างที่ 7 การอินทิเกรตที่มี $\log_a x$

โดยใช้การแปลงรูปเป็น ln ก่อนจึงเปลี่ยนตัวแปรใหม่

$$\int\frac{\log_2 x}{x}dx=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{\ln x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\int u\,du=\frac{1}{\ln 2}\frac{u^2}{2}+C$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\frac{(\ln x)^2}{2}+C$$

$$=\frac{\ln^2 x}{2\ln 2}+C$$

$u=\ln x$

$du=\frac{1}{x}dx$

ฟังก์ชันยกกำลัง (Exponential Functions)

ฟังก์ชันผกผัน (Inverse of Function)

$$f(x)\;=y\;=\frac{x}{2}+1$$

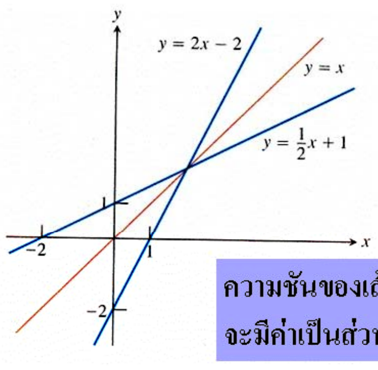
$$f^{-1}(x)=y^{-1}=2x-2$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน

$$\frac{d}{dx}f(x)\;=\frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x)=2$$

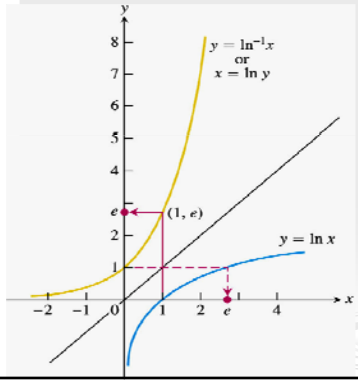
นั่นคือ ความชันของกราฟ
มีค่าเป็นส่วนกลับของกัน



ความชันของเส้นตรงคู่หักเหกัน
จะมีค่าเป็นส่วนกลับกันเสมอ

ความชันของกราฟจะมีค่าเป็นส่วนกลับซึ่งกันและกัน

ฟังก์ชันยกกำลัง $y=e^x$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ
ฟังก์ชันลอการิทึม $y=\ln x$



$$y\;=\ln x$$

$$y^{-1}=e^x$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน

ทฤษฎีบทที่ 1 ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดในช่วง I และ df/dx ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น f^{-1} จะหาอนุพันธ์ได้เช่นกัน และ

$$\left(\frac{df^{-1}}{dx}\right)_{x=f(a)} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}} \quad ; \frac{df}{dx} \neq 0$$

หรือ $(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$ (โดยไม่จำเป็นต้องรู้สมการ)

คุณสมบัติของ exponential กับ logarithm

จากนิยามของ natural exponential จะได้ว่า

$$e^{\ln x} = x, \quad (x \in R^+)$$
$$\ln(e^x) = x, \quad (x \in R)$$

อนุพันธ์และปริพันธ์ของ e^x

อนุพันธ์ของ e^x คือ ตัวมันเอง

$$y = e^x$$
$$\ln y = x$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$
$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

ปริพันธ์ของ e^x

$$\int e^u du = e^u + C$$

ตัวอย่างที่ 8

$$\frac{d}{dx}e^{-x} = e^{-x}\frac{d}{dx}(-x) = -e^{-x}$$
$$\frac{d}{dx}e^{\sin x} = e^{\sin x}\frac{d}{dx}\sin x = e^{\sin x}\cos x$$

ตัวอย่างที่ 9

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx = \int_0^1 e^u du = \left[e^{\sin x}\right]_0^{\pi/2} = e - 1$$

ตัวอย่างที่ 10 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

$$e^y\frac{dy}{dx} = 2x, \qquad x > \sqrt{3}, \qquad y(2) = 0$$

ปริพันธ์ทั้งสองข้าง $\int e^y dy = \int 2x dx$

$$e^y = x^2 + C$$

แทนค่า $e^0 = 2^2 + C, \qquad C = -3$

$$e^y = x^2 - 3$$
$$\ln e^y = \ln(x^2 - 3)$$

$y = \ln(x^2 - 3)$ จะเป็นจริงเมื่อ $x > \sqrt{3}$

ทฤษฎีบทที่ 2 ค่า e แสดงในรูป ค่าลิมิต

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

พิสูจน์ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

เมื่อ $f(x) = \ln x$ ดังนั้น $f'(1) = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x) - f(1)}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(1) = 1$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x)^{1/x}\right)$$
$$= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = 1$$
$$\ln e = 1 \Rightarrow e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

General Exponential Function

เนื่องจาก $a = e^{\ln a}$ สำหรับทุกค่าของ a เราจึงกำหนดได้ว่า

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x\ln a} = e^{\ln a^x}$$
$$a^x = e^{x\ln a}$$

อนุพันธ์ของ a^x

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\frac{d}{dx}(x\ln a) = e^{x\ln a}.\ln a = a^x.\ln a$$
$$\frac{d}{dx}a^u = a^u\ln a\frac{du}{dx}$$

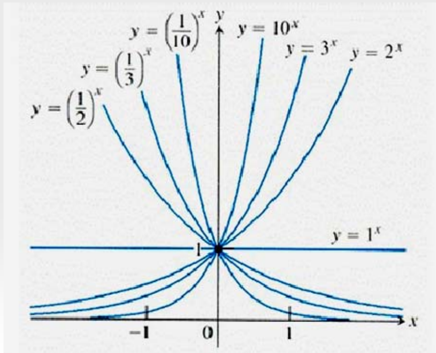
ตัวอย่างที่ 11

$$\frac{d}{dx}3^x = 3^x \ln 3$$

$$\frac{d}{dx}3^{-x} = 3^{-x}\ln 3 \frac{d(-x)}{dx} = -3^{-x}\ln 3$$

$$\frac{d}{dx}3^{\sin x} = 3^{\sin x}\ln 3 \cos x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(a^x) = \frac{d}{dx}(a^x \ln a) = a^x(\ln a)^2$$



ปริพันธ์ของ a^x

จาก $\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln a}) = a^x \ln a$

$$\int a^x dx = \int e^{x\ln a}dx = \int e^u \frac{du}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}e^u + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

ตัวอย่างที่ 12

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$\int 2^{\sin x}\cos x dx = \int 2^u du = \frac{2^u}{\ln 2} + C$$

$$= \frac{2^{\sin x}}{\ln 2} + C$$

$u = \sin x$

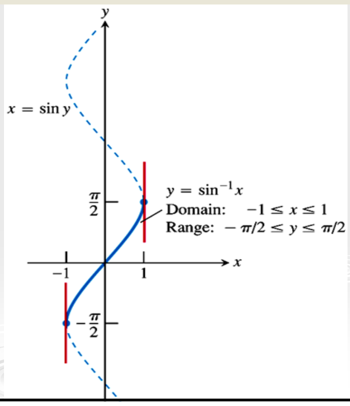
$du = \cos x dx$

อนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณผกผัน

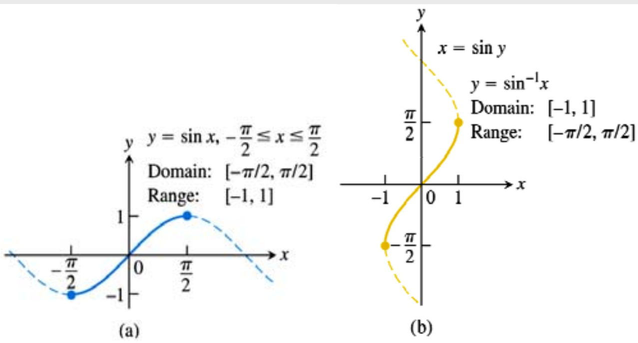
(Derivative and Integral of Inverse Trigonometric Function)

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน

$x=\sin y$ และ $y=\sin^{-1}x$

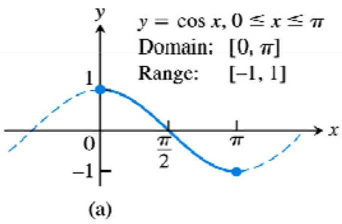


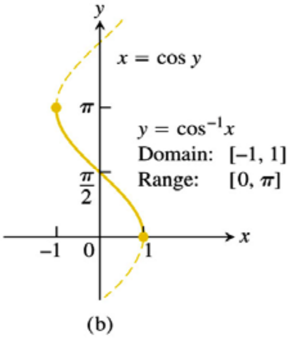
ฟังก์ชัน $y = \sin x$ และ $x = \sin y$



ฟังก์ชัน $y = \cos x$ และ $x = \cos y$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$$





อนุพันธ์ของ $y = \sin^{-1} x$ หรือ $y = \arcsin x$

$$y = \sin^{-1} x$$

$$\sin y = x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{dx}{dx}$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

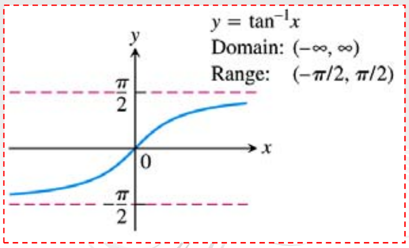
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \quad |u| < 1}$$

ตัวอย่างที่ 1

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

ฟังก์ชัน arctan x



อนุพันธ์ของ *Arctangent*

$$y = \tan^{-1} x$$

$$\tan y = x$$

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{dx}{dx}$$

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}}$$

ตัวอย่างที่ 2

อนุภาคเคลื่อนที่บนแกน x ด้วยฟังก์ชัน $x(t) = \tan^{-1}\sqrt{t}$

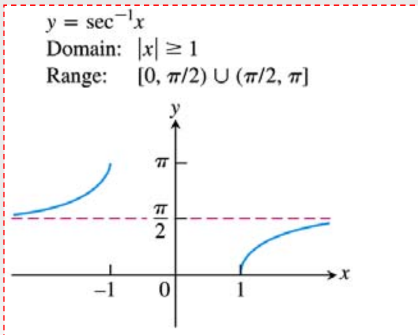
จงหาความเร็วที่เวลา $t = 16$

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{1+\sqrt{t}^2}\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$= \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{1+16}\frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{136}$$

ฟังก์ชัน Arcsecant



อนุพันธ์ของ *arcsecant*

$$y = \sec^{-1} x, \quad |x| > 1$$
$$\sec y = x$$
$$\frac{d}{dx}\sec y = \frac{dx}{dx}$$
$$\sec y \tan y \frac{dy}{dx} = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

$$\tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1}$$
$$= \pm\sqrt{x^2 - 1}$$
$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

ความชันของ $y = \sec^{-1} x$ เป็นบวก

ตัวอย่างที่ 3

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}(5x^4) = \frac{1}{|5x^4|\sqrt{(5x^4)^2-1}}\frac{d}{dx}(5x^4)$$
$$= \frac{4}{x\sqrt{25x^8-1}}$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $\cos^{-1} x$, $\cot^{-1} x$, $\csc^{-1} x$

พิจารณาจากเอกลักษณ์

$$\cos^{-1} x = \pi/2 - \sin^{-1} x$$
$$\cot^{-1} x = \pi/2 - \tan^{-1} x$$
$$\csc^{-1} x = \pi/2 - \sec^{-1} x$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{d}{dx}\sin^{-1} x$$
$$\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\frac{d}{dx}\tan^{-1} x$$
$$\frac{d}{dx}\csc^{-1} x = -\frac{d}{dx}\sec^{-1} x$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการสำหรับเส้นสัมผัสของกราฟ

$y = \cot^{-1} x$ ที่ **x = -1**

$$\cot^{-1} x = \pi/2 - \tan^{-1} x$$
$$\cot^{-1}(-1) = \pi/2 - \tan^{-1}(-1)$$
$$= \pi/2 - (-\pi/4) = 3\pi/4$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = -\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=-1} = -\frac{1}{2}$$
$$y - 3\pi/4 = (-1/2)(x+1)$$

สรุปอนุพันธ์ของ ฟังก์ชันตรีโกณผกผัน

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \quad |u| < 1$$
$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \quad |u| < 1$$
$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \quad |u| > 1$$
$$\frac{d}{dx}\csc^{-1} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \quad |u| > 1$$

สรุปสูตรปริพันธ์

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad (u^2 < a^2)$$
$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$
$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C, \qquad (u^2 > a^2)$$

ตัวอย่างที่ 5

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x\Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{\pi}{12}$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x\Big|_0^1 = \pi/4$$
$$\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x\Big|_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \pi/12$$

ตัวอย่างที่ 6

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)+C$$

ตัวอย่างที่ 7

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-4x+4)+4}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}(u/a)+C$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$$

ตัวอย่างที่ 8

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+1)+C$$

ตัวอย่างที่ 9 $(u=e^x, \ln u = x, du/u = dx)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-6}} = \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2-a^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}$$

$$= \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right|+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\sec^{-1}\left(\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right)+C$$

Hyperbolic Functions

ฟังก์ชัน f ที่อยู่บนช่วงที่กำหนดและตรงกลางของฟังก์ชันอยู่ที่จุดกำเนิดสามารถเขียนได้ว่า

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{evenpart} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{oddpart}$$

หรือ

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{evenpart} + \underbrace{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}_{oddpart}$$

Hyperbolic cosine ของ x

Hyperbolic sine ของ x

$$e^x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} + \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sinh x + \cosh x$$

Hyperbolic Functions

$$e^x = \sinh x + \cosh x$$

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

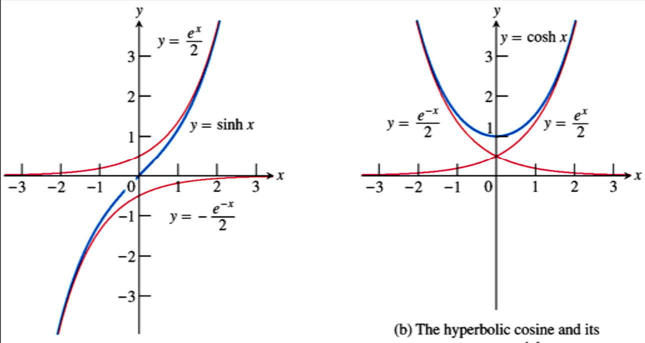
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x-e^{-x}}$$

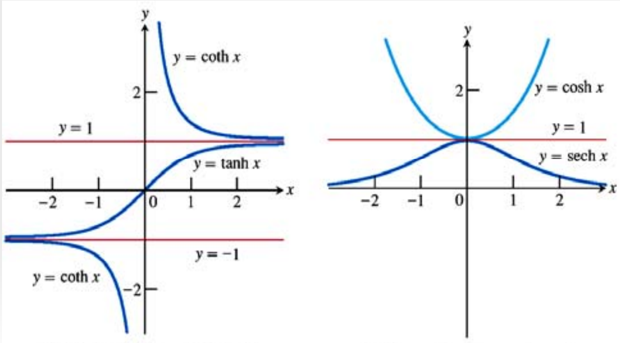
กราฟของฟังก์ชัน sinh x และ cosh x



(a) The hyperbolic sine and its component exponentials.

(b) The hyperbolic cosine and its component exponentials.

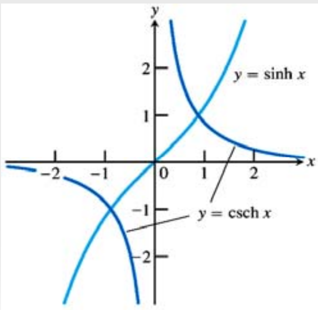
กราฟของฟังก์ชัน tanh x, coth x และ sech x



(c) The graphs of $y = \tanh x$ and $y = \coth x = 1/\tanh x$.

(d) The graphs of $y = \cosh x$ and $y = \operatorname{sech} x = 1/\cosh x$.

กราฟของฟังก์ชัน csch x



(e) The graphs of $y = \sinh x$ and $y = \operatorname{csch} x = 1/\sinh x$.

เอกลักษณ์ของ hyperbolic functions

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1 \qquad \sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1 \qquad \csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \qquad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

อนุพันธ์ของ hyperbolic functions

$$\frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

ปริพันธ์ของ hyperbolic functions

$$\int \sinh u\, du = \cosh u + C \qquad \int \sin u\, du = -\cos u + C$$

$$\int \cosh u\, du = \sinh u + C \qquad \int \cos u\, du = \sin u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C \qquad \int \sec^2 u\, du = \tan u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C \qquad \int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C \qquad \int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C \qquad \int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$$

ตัวอย่างที่ 1

a) $\dfrac{d}{dt}\left(\tanh\sqrt{1+t^2}\right) = \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}\,\dfrac{d}{dt}\sqrt{1+t^2} = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}$

b) $\displaystyle\int \coth 5x\,dx = \int\frac{\cosh 5x}{\sinh 5x}dx = \frac{1}{5}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|\sinh 5x| + C$

$(u = \sinh 5x \to du = 5\cosh 5x\,dx)$

c) $\displaystyle\int_0^1 \sinh^2 x\,dx = \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1(\cosh 2x - 1)dx$

$\left(\sinh^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}\right)$ $\displaystyle = \frac{1}{2}\left[\frac{\sinh 2x}{2} - x\right]_0^1 = \frac{\sinh 2}{4} - \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 1 (ต่อ)

d) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} 4e^x \sinh x\,dx = \int_0^{\ln 2} 4e^x\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx$

$\displaystyle = \int_0^{\ln 2}(2e^{2x} - 2)\,dx$

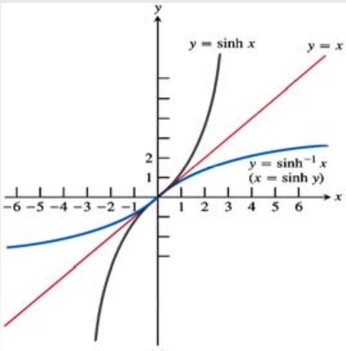
$= \left[e^{2x} - 2x\right]_0^{\ln 2}$

$= (e^{2\ln 2} - 2\ln 2) - (1 - 0)$

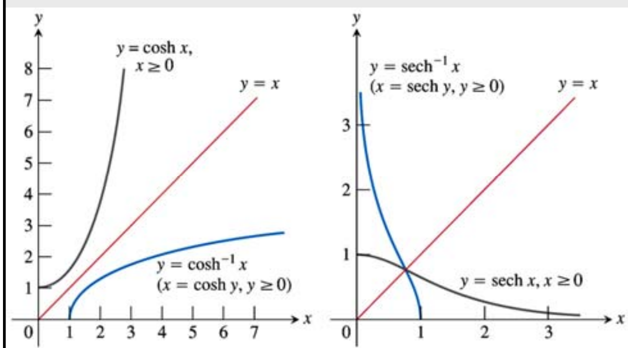
$= 4 - 2\ln 2 - 1$

$= 3 - 2\ln 2$

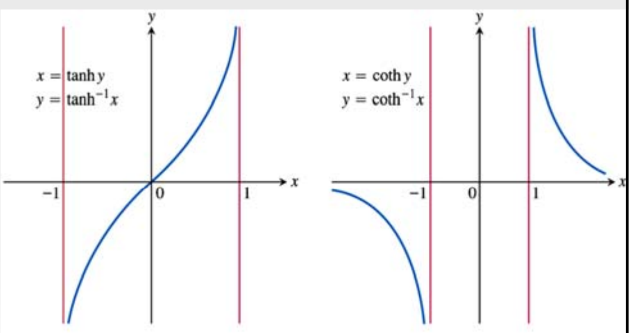
Inverse Hyperbolic Functions



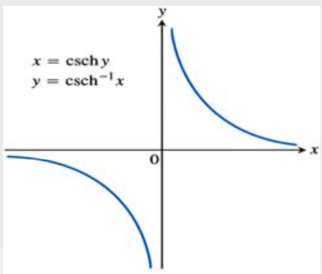
(a)



(b) (c)



(a) (b)



(c)

Inverse Hyperbolic Functions

$$y=\sinh^{-1}x$$
$$y=\cosh^{-1}x$$
$$y=\tanh^{-1}x$$
$$\ldots$$

เอกลักษณ์ของ Inverse Hyperbolic Functions

$$\operatorname{sech}^{-1}x=\cosh^{-1}\frac{1}{x}$$
$$\operatorname{csch}^{-1}x=\sinh^{-1}\frac{1}{x}$$
$$\coth^{-1}x=\tanh^{-1}\frac{1}{x}$$

อนุพันธ์ของ Inverse Hyperbolic Functions

หาเช่นเดียวกับอนุพันธ์ของ Inverse Trigonometric Functions

$$y=\sinh^{-1}x$$
$$\sinh y=x$$
$$\frac{d}{dx}\sinh y=\frac{dx}{dx}$$
$$\cosh y\frac{dy}{dx}=1$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cosh y}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

สรุปอนุพันธ์ของ Inverse Hyperbolic Functions

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx},\quad u>1$$
$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}u=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx},\quad |u|<1$$
$$\frac{d}{dx}\coth^{-1}u=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx},\quad |u|>1$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}u=\frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx},\quad 0<u<1$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}u=\frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx},\quad u\neq 0$$

ตัวอย่างที่ 2

จงแสดงว่าเมื่อ u หาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้เมื่อ $x>1$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}u)=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

$$y=\cosh^{-1}x\Leftrightarrow x=\cosh y$$
$$1=\sinh y\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sinh y}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Chain Rule:

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}u)=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

ปริพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน Inverse hyperbolic

1. $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}=\sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C,\qquad a>0$

2. $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C,\qquad u>a>0$

3. $\displaystyle\int\frac{du}{a^2-u^2}=\begin{cases}\frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C & \text{if } u^2<a^2\\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C, & \text{if } u^2>a^2\end{cases}$

4. $\displaystyle\int\frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}}=-\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C,\qquad 0<u<a$

5. $\displaystyle\int\frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}}=-\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{u}{a}\right|+C,\qquad u\neq 0 \text{ and } a>0$

ตัวอย่างที่ 3

จงหาค่า $\displaystyle\int_0^1\frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}}$

$$\int\frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}}=\int\frac{2dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(2x)^2}}\Leftarrow(u=2x, a=\sqrt{3})$$
$$=\int\frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}=\sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C=\sinh^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)+C$$
$$\Rightarrow\int_0^1\frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}}=\sinh^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]_0^1=\sinh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)-\sinh^{-1}(0)$$
$$=\sinh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$