

บทที่ 9

ตัวเลขเชิงซ้อน

(Complex Number)

เนื้อหา

- ❖ Complex Numbers
- ❖ Complex plane
- ❖ Polar coordinates and polar forms
- ❖ Power and roots

จำนวนเชิงซ้อน (Complex numbers)

- ❖ เกิดขึ้นเพื่อแก้ปัญหาคำตอบของสมการที่ไม่สามารถหาคำจริงได้ เช่น $x^2 + 1 = 0$ จะเห็นว่าไม่สามารถหาคำตอบของ ที่เป็นค่าจำนวนจริงได้ ทำให้เกิดการนิยามหน่วยจินตภาพ (Imaginary unit) $i = \sqrt{-1}$
- ❖ โดยทั่วไปแล้วจำนวนเชิงซ้อนจะอยู่ในรูป

$$z = a + bi$$

ส่วนจริง (Real part) ส่วนจินตภาพ (Imaginary unit)

$$a = \text{Re } z$$

$$b = \text{Im } z$$

การบวก การลบ และการคูณ เลขเชิงซ้อน

สามารถทำได้ดังนี้ คือ

กำหนดให้ $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ จะได้

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

จะเห็นว่าผลที่ได้มาจาก $i^2 = -1$ กล่าวคือ

$$(bi)(di) = (bd)(i^2) = -bd$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าส่วนจริง ส่วนจินตภาพ ผลรวมและผลคูณ ของ $z_1 = 8 + 3i$ และ $z_2 = 9 - 2i$

วิธีทำ

$$\text{Re } z_1 = 8$$

$$\text{Im } z_1 = 3$$

$$\text{Re } z_2 = 9$$

$$\text{Im } z_2 = -2$$

$$z_1 + z_2 = (8 + 3i) + (9 - 2i) = 17 + i$$

$$z_1 z_2 = (8 + 3i)(9 - 2i)$$

$$= 72 + 6 + i(-16 + 27) = 78 + 11i$$

ตัวอย่างที่ 2 จงคำนวณหาค่าต่อไปนี้

$$1. (6 + 3i) - (10 + 8i)$$

$$2. (4 + 2i)(4 - 2i)$$

วิธีทำ

$$1. (6 + 3i) - (10 + 8i) = (6 - 10) + (3i - 8i)$$

$$= -4 - 5i$$

$$2. (4 + 2i)(4 - 2i) = 16 + 4 + i(-8 + 8)$$

$$= 20$$

หมายเหตุ จะเห็นว่าการคูณจำนวนเชิงซ้อนในรูป $(a + bi)$ และ $(a - bi)$

จะได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นค่าจริง $a^2 + b^2$ ค่าจำนวนเชิงซ้อน

ในรูปลักษณะนี้เรียกว่าอยู่ในรูปสังยุค (Conjugate) ซึ่งกันและกัน

กล่าวคือ $(a + bi)$ และ $(a - bi)$ เป็นค่าสังยุค ซึ่งกันและกัน

กำหนดให้ $z = a + bi$ ค่าสังยุคของ z เขียนแทนด้วย $\bar{z} = a - bi$ ซึ่งจะมีประโยชน์สำหรับ การหาร โดยที่

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

คุณสมบัติของคอนจูเกตที่สำคัญ

โดยให้ z, z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

ตัวอย่างที่ 3 จงคำนวณหาค่าต่อไปนี้

ก) $\frac{6+3i}{10+8i}$ ข) $\frac{5i}{1-7i}$

วิธีทำ ก) $\frac{6+3i}{10+8i} = \frac{6+3i}{10+8i} \cdot \frac{(10-8i)}{(10-8i)}$

$$= \frac{[(6)(10) + (3)(-8)(-1) + [(6)(-8) + (3)(10)]i]}{10^2 + 8^2}$$

$$= \frac{84 - 18i}{164}$$

วิธีทำ ข) $\frac{5i}{1-7i} = \frac{5i}{(1-7i)} \cdot \frac{(1+7i)}{(1+7i)} = \frac{-35+5i}{1+49} = \frac{-35}{50} + \frac{5}{50}i$

คุณสมบัติบางประการเกี่ยวกับคอนจูเกต

กำหนดให้ $z = a + bi$ ดังนั้น $\bar{z} = a - bi$

จะได้ว่า $\operatorname{Re} z = a = \frac{(z + \bar{z})}{2}$ และ $\operatorname{Im} z = b = \frac{(z - \bar{z})}{2i}$

โมดูลัส (Modulus)

ให้ $z = a + bi$ ค่าโมดูลัส (Modulus) ของ z เขียนแทนด้วย $|z|$ และหาได้จาก

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ค่าโมดูลัส จะเป็น ค่าจริงบวกเสมอ

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าโมดูลัส และ คอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อน

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

ดังนั้น ในการหารจำนวนเชิงซ้อน

จะได้ว่า $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$

คุณสมบัติของโมดูลัส

1. ถ้า $|z| = 0$ แล้ว $z = 0$

2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

3. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

4. คุณสมบัติ อสมการสามเหลี่ยม (Triangle inequality) คือ

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

ตัวอย่างที่ 4 จงตรวจสอบคุณสมบัติ อสมการสามเหลี่ยมของ $z_1 = 1 + i, z_2 = -2 + 3i$

วิธีทำ

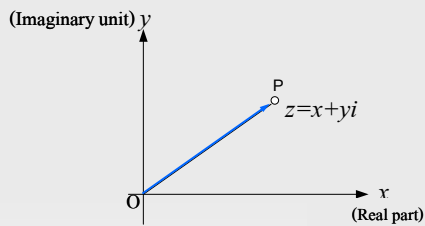
$$|z_1 + z_2| = |(1+i) + (-2+3i)| = |-1+4i| = \sqrt{17} = 4.123$$

$$|z_1| + |z_2| = |1+i| + |-2+3i| = \sqrt{2} + \sqrt{13} = 5.020$$

$$\therefore |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

ระนาบเชิงซ้อน (complex plane)

ปริมาณเชิงซ้อนสามารถแสดงในระนาบเชิงซ้อนได้ดังรูป



ความยาวของเวกเตอร์ OP หมายถึงค่าโมดูลัสของจำนวนเชิงซ้อน

$$|OP| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้วและเลขชี้กำลัง

การเขียนจำนวนเชิงซ้อน

❖ รูปแบบเชิงขั้ว (Polar form)

$$z = a + bi \quad \rightarrow \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

❖ รูปแบบเลขชี้กำลัง (Exponential form)

โดยนำสูตรของออยเลอร์ (Euler's formula) ที่ว่า

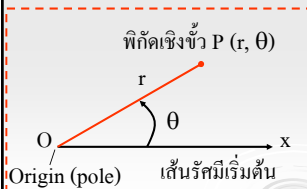
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

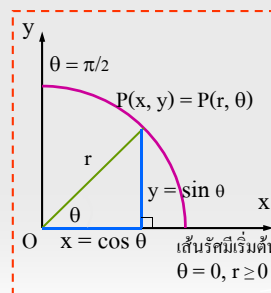
พิกัดเชิงขั้วและกราฟ (Polar coordinates & Graph)

ในการนิยามพิกัดเชิงขั้ว เริ่มจากจุดกำเนิด, O, จากนั้นวาดเส้นรัศมีเริ่มต้น ออกจากจุด O ซึ่งเรียกว่า แกนพิกัดเชิงขั้ว โดยรัศมีมักสอดคล้องกับแกน +x ของระบบพิกัดฉาก



จุด P (r, theta) ถูกกำหนดตำแหน่งโดย r แสดงระยะจาก O ไปยัง P และ theta คือมุมระหว่างเส้นรัศมีเริ่มต้น กับ OP

ความสัมพันธ์ของระบบพิกัดฉาก & พิกัดเชิงขั้ว



จากรูป จะ ได้ความสัมพันธ์ดังนี้

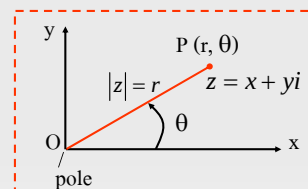
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \tan \theta$$

ตัวอย่าง จงหาสมการที่เท่ากันในระบบพิกัดฉาก

สมการเชิงขั้ว	สมการพิกัดระบบฉากที่เทียบเท่ากัน
$r \cos \theta = 2$	$x = 2$
$r^2 \sin \theta \cos \theta = 4$	$xy = 4$
$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
$r = 1 + 2r \cos \theta$	$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$
$r = 1 - \cos \theta$	$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$
$r = 1 + 2r \cos \theta$	$x^2 + y^2 = (1 + 2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2$
$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + 2x$	$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$

จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว (Polar form) และรูปแบบเลขชี้กำลัง (Exponential form) สามารถพิจารณาได้จากระนาบเชิงซ้อนดังนี้



$$z = x + yi$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\theta = \text{Arg } z = \arctan \frac{y}{x}$$

ค่า θ เรียกว่า ค่าอาร์กิวเมนต์ (Argument) ของ z เขียนแทนด้วย

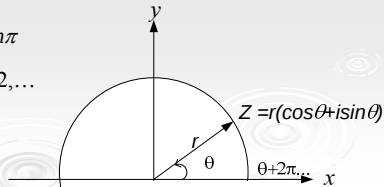
$$\theta = \text{Arg } z = \arctan \frac{y}{x}$$

จะเห็นว่า ค่าอาร์กิวเมนต์ เป็นได้หลายค่า ณ ตำแหน่งเดียวกัน
ในระบบระบบเชิงขั้ว คือ ที่ $\theta, \theta+2\pi, \theta+4\pi, \dots$

ค่า θ ที่อยู่ในช่วง $(-\pi, \pi]$ จะนิยามว่าเป็น ค่าหลักของอาร์กิวเมนต์
เขียนแทนด้วย $\text{Arg } z$ ในรูปทั่วไป จะได้ว่า

$$\arg z = \text{Arg } z + 2n\pi$$

เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



ตัวอย่างที่ 1 $z = 1 + i$ มีรูปแบบเชิงขั้วเป็น $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

$$r = |z| = \sqrt{2}, \quad \text{Arg } z = \frac{\pi}{4}, \quad \arg z = \frac{\pi}{4} + 2n\pi (n = 0, 1, \dots)$$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูปพิกัดเชิงขั้ว

ก) $z = -1 + i\sqrt{3}$ ข) $z = -9$

ก) $r = |z| = 2, \quad \text{Arg } z = \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$

$$\arg z = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$z = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

ข) $r = |z| = 9, \quad \text{Arg } z = \arctan(\frac{0}{-9}) = \pi$

$$z = 9(\cos \pi + i \sin \pi)$$

การคูณและหารในรูปแบบเชิงขั้ว

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

การคูณ

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

การหาร $z = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow z z_2 = z_1$

$$|z z_2| = |z| |z_2| = |z_1|$$

$$\arg(z z_2) = \arg z + \arg z_2 = \arg z_1$$

$$\arg z = \arg z_1 - \arg z_2$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณและผลหารระหว่าง $z_1 = -2 + 2i, \quad z_2 = 3i$

จะได้ว่า $\text{Arg } z_1 = 3\pi/4, \quad \text{Arg } z_2 = \pi/2$

$$z_1 z_2 = -6 - 6i, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{8} = 72 \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 2\sqrt{2}/3 = |z_1|/|z_2|$$

$$\text{Arg } z_1 z_2 = -3\pi/4 = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 - 2\pi$$

$$\text{Arg}(z_1/z_2) = \pi/4 = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2$$

$$z_1 z_2 = 72 [\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i \sin(-\frac{3\pi}{4})]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} [\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4})]$$

รูปแบบเลขชี้กำลัง (Exponential form)

จากสูตรของออยเลอร์ (Euler's formula) ที่ว่า $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

ดังนั้น เขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเลขยกกำลัง จะได้ว่า

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$

การยกกำลังและการถอดรากเลขเชิงซ้อน

ดังนั้น $z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

สูตรของเดอมัวร์

(de Moivre's formula)

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

กรณีการยกกำลัง

จากสมการ $z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

เมื่อ $n=2$ จะได้ $\cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$
จาก $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$, $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$

ตัวอย่างที่ 4 จงคำนวณค่า $(3+3i)^5$

$$\begin{aligned} n=5, \quad r=3\sqrt{2}, \quad \theta = \text{Arg } z = \frac{\pi}{4} \\ z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \\ (3+3i)^5 = (3\sqrt{2})^5 (\cos 5 \cdot \frac{\pi}{4} + i \sin 5 \cdot \frac{\pi}{4}) \\ = 972\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -972 - 972i \end{aligned}$$

การหารากของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z = w^n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) $\Rightarrow w = \sqrt[n]{z}$ ค่าของ w สามารถหาได้โดย

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad w = R(\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$w^n = R^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) = z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ดังนั้น $R^n = r$, $R = \sqrt[n]{r}$ $n\phi = \theta + 2k\pi$, $\phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$a_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

ค่าต่างๆจะอยู่ในวงกลมรัศมี $\sqrt[n]{r}$ มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด ประกอบเป็นรูปเหลี่ยมด้านเท่า n ด้าน ค่าของ a_k ที่มีอาร์กิวเมนต์หลัก (ที่ $k=0$) จะเป็นค่าหลักของ $w = \sqrt[n]{z}$

ตัวอย่างที่ 5 จงคำนวณค่าของ $(2i)^{\frac{1}{2}}$ และ $(\sqrt{3}-i)^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} 2i &= 2e^{i\frac{\pi}{2}} \quad r_0 = 2, \theta_0 = \frac{\pi}{2} \\ a_k &= \sqrt{r_0} \left(\cos \left(\frac{2\pi k + \theta_0}{2} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi k + \theta_0}{2} \right) \right), k = 0, 1 \\ a_k &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{2\pi k + \frac{\pi}{2}}{2} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi k + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \right), k = 0, 1 \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า $k=0$ จะได้ $a_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i$

เมื่อแทนค่า $k=1$ จะได้ $a_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -1 - i$

$$\sqrt{3}-i = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})} \quad r_0 = 2, \theta_0 = -\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \sqrt[3]{r_0} \left(\cos \left(\frac{2\pi k + \theta_0}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi k + \theta_0}{3} \right) \right), k = 0, 1, 2 \\ a_k &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{2\pi k - \frac{\pi}{6}}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi k - \frac{\pi}{6}}{3} \right) \right), k = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า $k=0$ จะได้

$$a_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{18} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{18} \right) \right) = \sqrt[3]{2} (0.984 - i0.1736)$$

เมื่อแทนค่า $k=1$ จะได้

$$a_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{11\pi}{18} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{18} \right) \right) = \sqrt[3]{2} (-0.34202 + i0.93969)$$

เมื่อแทนค่า $k=2$ จะได้

$$a_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{23\pi}{18} \right) + i \sin \left(\frac{23\pi}{18} \right) \right) = \sqrt[3]{2} (-0.64279 - i0.59943)$$

ในกรณีที่ $z=1$ จะได้ $|z|=r=1$ และ $\text{Arg } z=0$

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

ค่าต่างๆเรียกว่ารากที่ n ของ 1 มีตำแหน่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วยและมีระยะห่างกันทุกๆ $\frac{2\pi}{n}$ เรเดียน มีทั้งหมด n ราก ซึ่งสอดคล้องกับค่า $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

เมื่อเขียนเซตคำตอบในรูปเชิงขั้วหรือ รูปเอ็กโพเนนเชียลก็จะได้เป็น

$$e^{i\left(\frac{2\pi k}{n}\right)} = \cos \left(\frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi k}{n} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

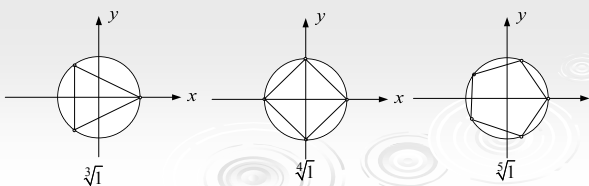
กำหนด $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

จะได้รากที่ n ของ 1 เป็น

$$\omega_n^k = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

หรือ

$$1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$$



ตัวอย่างที่ 6 จงหารากที่ n ทั้งหมดของ 1 เมื่อ $n=2, 3$ และ 4

$$n=2 \quad \omega_2 = e^{i\left(\frac{2\pi}{2}\right)} = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

ดังนั้น รากที่ 2 ของ 1 คือ 1, -1

$$\begin{aligned} n=3 \quad \omega_3 &= e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \omega_3^2 &= e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

ดังนั้น รากที่ 3 ของ 1 คือ 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{aligned} n=4 \quad \omega_4 &= e^{i\left(\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = i \\ \omega_4^2 &= e^{i\left(\frac{4\pi}{4}\right)} = e^{i\pi} = -1 \\ \omega_4^3 &= e^{i\left(\frac{6\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -i \end{aligned}$$

ดังนั้น รากที่ 4 ของ 1 คือ 1, i , -1 , $-i$