

## บทที่ 10 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)

การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ คือการแสดงให้เห็นว่า  
สมการใช้ได้จริงกับทุกจำนวนเต็มบวกโดยใช้หลักความ  
จริงแต่ไม่ต้องกระทำการจริง แต่ใช้การพิสูจน์ ซึ่งเรียกว่า  
การพิสูจน์เชิงอุปนัย (Proof by induction)

### ตัวอย่างสมการ

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

### การพิสูจน์เชิงอุปนัย (Proof by induction)

มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

**ขั้นที่ 1:** ตรวจสอบสมการว่าใช้กับ  $n = 1$  ได้

**ขั้นที่ 2:** พิสูจน์จาก  $\Gamma$  ใดๆ เมื่อ  $n = k$  ว่าสามารถใช้ได้จริงกับค่า  $n = k + 1$  ด้วย

### ตัวอย่าง การพิสูจน์ $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ขั้นที่ 1 ให้  $n = 1$  จะได้  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$  ถูกต้อง

ขั้นที่ 2 ให้  $n = k$  แล้ว  $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$  เป็นจริง  
ดังนั้น เมื่อ  $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

ถูกต้อง

### ตัวอย่าง $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

ขั้นที่ 1 ให้  $n = 1$  จะได้  $1 = 1$  ถูกต้อง

ขั้นที่ 2 ให้  $n = k$  แล้ว  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$  เป็นจริง  
ดังนั้น เมื่อ  $n = k + 1$  จะได้

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) \\ &= k^2 + (2k+1) \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \end{aligned}$$

ถูกต้อง

### ตัวอย่าง $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ขั้นที่ 1 ให้  $n = 1$  จะได้  $1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$  ถูกต้อง

ขั้นที่ 2 ให้  $n = k$  แล้ว  $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$   
เป็นจริง ดังนั้น เมื่อ  $n = k + 1$  จะได้

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1) \{ \frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \} / 6 \\ &= (k+1)(2k^2 + 7k + 6) / 6 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

ถูกต้อง