บทที่ 8

ผลตอบสนองสมบูรณ์ของวงจรอันดับที่ 2

The Complete Response of a Second Order Circuits

สิ่งที่ควรรู้ในบทนี้

1. วงจรไฟฟ้าเขียนเป็นสมการ Second Order Differential Equation
2. การแก้สมการ Second Order Differential Equation
3. การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า Second Order Differential Equation
4. การเขียนรูปคลื่นสัญญาณไฟฟ้าชนิด Second Order Differential Equation (Unit Step Function)

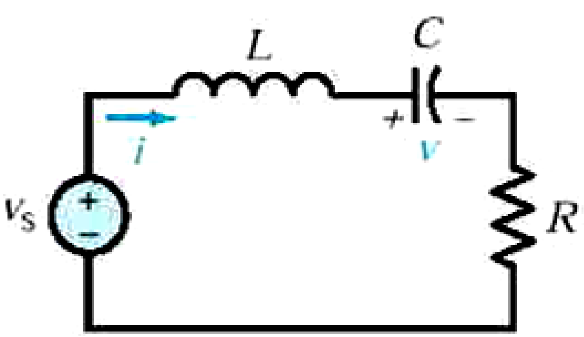
1. วงจรไฟฟ้าเขียนเป็นสมการ Second Order Differential Equation

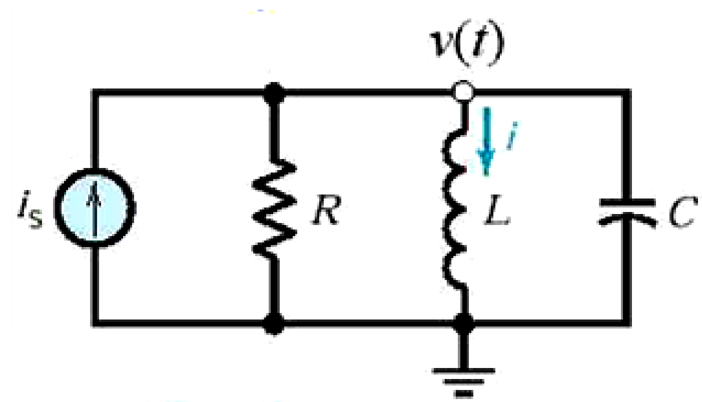
วิธีการเขียนสมการ Second Order Differential Equation แทนวงจรไฟฟ้ามี 2 วิธีดังนี้

1.1 แบบวิธีตรง (Direct Method)

1.2 แบบใช้ตัวกระทำ (Operator Method)

ตัวอย่างวงจร Second Order Differential Equation



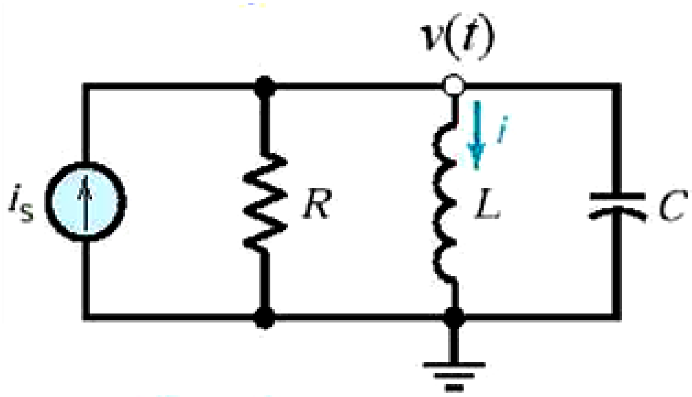


$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=v_s$$

$$LC\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{di}{dt}+i=i_S$$

2. วิธีการเขียนสมการ Differential Equation แบบวิธีตรง(Direct Method)

ตัวอย่างที่ 1.



KCL : $$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}+i=i_S \qquad \text{......... (1)}$$

แต่ $$v=L\frac{di}{dt} \qquad \text{......... (2)}$$

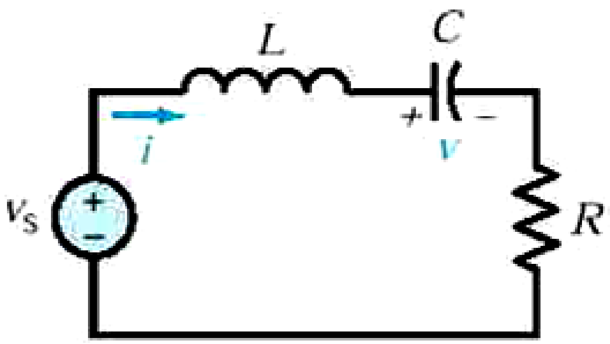
แทนค่าใน (1)

$$LC\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{di}{dt}+i=i_S$$

สมการ Second Order Differential Equation

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=\frac{i_S}{LC}} \qquad \text{......... (3)}$$

ตัวอย่างที่ 2.



KVL : $$L\frac{di}{dt}+Ri+v=v_S \qquad \text{......... (1)}$$

แต่ $$i=C\frac{dv}{dt} \qquad \text{......... (2)}$$

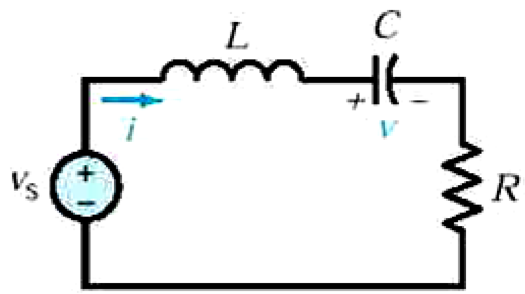
แทนค่าใน (1) $$LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=v_S$$

สมการ Second Order Differential Equation $$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{LC}v=\frac{v_S}{LC}} \qquad \text{......... (3)}$$

ตาราง ขั้นตอนในการเขียนสมการอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีตรง

ขั้นที่ 1	หาตัวแปร x_1 และ x_2 โดยที่ตัวแปรเหล่านี้คือแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ และ/หรือ กระแสผ่านตัวเหนี่ยวนำ
ขั้นที่ 2	เขียนสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในรูป $\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2)$
ขั้นที่ 3	เขียนสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งอีกหนึ่งสมการในรูปของตัวแปร x_2 โดยที่ $\frac{dx_2}{dt} = Kx_1$ หรือ $x_1 = \frac{1}{K}\frac{dx_2}{dt}$
ขั้นที่ 4	แทนสมการจาก ขั้นที่ 3 ในสมการขั้นที่ 2 จะได้สมการอนุพันธ์อันดับสอง

จากตัวอย่างที่ 2



เทียบกับตารางเขียนสมการ

ขั้นที่ 1

$$i = x_1 \qquad v = x_2$$

KVL : $$L\frac{di}{dt} + Ri + v = v_S \qquad \text{......... (1)}$$

ขั้นที่ 2

$$L\frac{dx_1}{dt} + Rx_1 + x_2 = v_S$$

แต่ $$i = C\frac{dv}{dt} \qquad \text{......... (2)}$$

ขั้นที่ 3

$$x_1 = C\frac{dx_2}{dt}$$

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = v_S$$

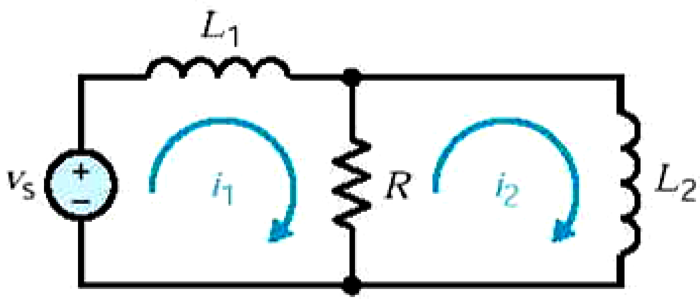
แทนค่าใน (1)

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = \frac{v_S}{LC}} \qquad \text{......... (3)}$$

ขั้นที่ 4

$$\boxed{\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dx_2}{dt} + \frac{1}{LC}x_2 = \frac{v_S}{LC}}$$

3. วิธีการเขียนสมการ แบบใช้ตัวกระทำ (Operator Method)



ใช้หลักการ Mesh analysis

$$\left.\begin{aligned} L_1\frac{di_1}{dt}+R(i_1-i_2) &= v_S \\ R(i_2-i_1)+L_2\frac{di_2}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{......... (1)}$$

แทน differentiate ด้วย S – operator โดยให้

$$s=\frac{d}{dt} \qquad s^2=\frac{d^2}{dt^2} \qquad \frac{1}{s}=\int dt$$

จะได้สมการ

$$\left.\begin{aligned} L_1si_1+\mathrm{R}i_1-Ri_2 &= v_S \\ -Ri_1+L_2si_2+Ri_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{... (2)}$$

ดัดแปลงสมการจะได้

$$\left.\begin{aligned} (L_1s+\mathrm{R})i_1-Ri_2 &= v_S \\ -Ri_1+(sL_2+R)i_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{... (3)}$$

$$(L_1 s + R)i_1 - Ri_2 = v_S$$

$$-Ri_1 + (sL_2 + R)i_2 = 0$$

ถ้า $L_1 = 1H, L_2 = 2H, R = 1\Omega$

$$\left.\begin{aligned}(s+1)i_1 - i_2 &= v_S \\ -i_1 + (2s+1)i_2 &= 0\end{aligned}\right\} \quad \text{.........} \ (4)$$

ใช้กฎ Cramer's Rule

$$\begin{bmatrix}(s+1) & -1 \\ -1 & (1+2s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1 \\ i_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_s \\ 0\end{bmatrix} \quad \text{.........} \ (5)$$

$$i_1 = \frac{v_S(2s+1)}{(s+1)(2s+1)-1} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$\left.\begin{aligned}i_1 &= \frac{v_S(2s+1)}{2s^2+3s} \\ i_2 &= \frac{v_S}{2s^2+3s}\end{aligned}\right\} \quad \text{......} \ (6)$$

$$\left.\begin{aligned}2s^2 i_1 + 3si_1 &= v_s + 2sv_S \\ 2s^2 i_2 + 3si_2 &= v_s\end{aligned}\right\} \quad \text{......} \ (7)$$

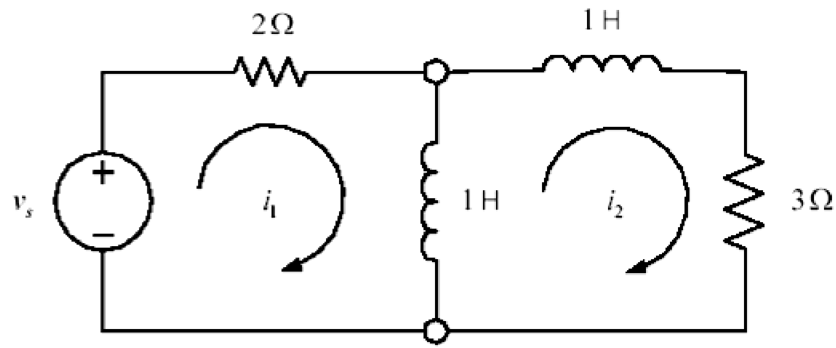
สมการ Second Order Differential Equation

$$\left.\begin{aligned}2\frac{d^2 i_1}{dt} + 3\frac{di_1}{dt} &= v_s + 2\frac{dv_S}{dt} \\ 2\frac{d^2 i_2}{dt} + 3\frac{di_2}{dt} &= v_s\end{aligned}\right\} \quad \text{......} \ (8)$$

ตาราง ขั้นตอนในการเขียนสมการอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีใช้ตัวกระทำ

ขั้นที่ 1	หาตัวแปร x_1 ที่ต้องการคำตอบ
ขั้นที่ 2	เขียนสมการอนุพันธ์หนึ่งสมการ ในรูปตัวแปรที่ต้องการ x_1 และตัวแปรอีกตัว x_2
ขั้นที่ 3	เขียนสมการอนุพันธ์อีกหนึ่งสมการในรูปของตัวแปร x_2 และตัวแปรที่ต้องการ x_1
ขั้นที่ 4	ใช้ตัวกระทำ $s = d/dt$ และ $1/s = \int dt$ แทนในสมการในขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 จะได้สมการพีชคณิตสองสมการ ในรูปของ x_1 และ x_2
ขั้นที่ 5	ใช้กฎของเครมเมอร์หาคำตอบ x_1 เป็นฟังก์ชันของแหล่งจ่ายและตัวกระทำ $x_1 = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ เมื่อ $P(s)$ และ $Q(s)$ เป็นโพลีโนเมียลของ s
ขั้นที่ 6	เรียบเรียงสมการในขั้นที่ 5 ใหม่ในรูป $Q(s)x_1 = P(s)$
ขั้นที่ 7	แปลงตัวกระทำทั้งหมดในสมการในขั้นที่ 6 กลับเป็นอนุพันธ์ โดยที่ $s = d/dt$ และ $s^2 = d^2/dt^2$ จะได้สมการอนุพันธ์อันดับสองตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการอนุพันธ์สำหรับกระแสในวงจรข้างล่าง



วิธีทำ *เขียนสมการ Mesh Current*

แทนค่า $\frac{d}{dt} = s$

Loop 1: $2i_1 + \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} = v_S \longrightarrow (2+s)i_1 - si_2 = v_S$

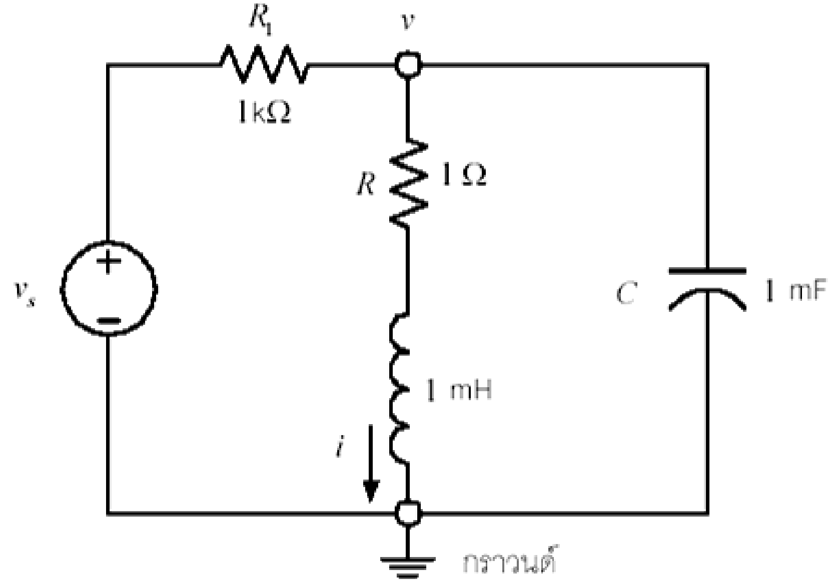
Loop 2: $-\frac{di_1}{dt} + 3i_2 + 2\frac{di_2}{dt} = 0 \longrightarrow -si_1 + (3+2s)i_2 = 0$

ใช้กฎ Cramer Rule หาคำตอบ i_2 *จะได้ค่า* $i_2 = \frac{sV_S}{(2+s)(3+2s)-s^2} = \frac{sV_S}{s^2+7s+6}$

จัดสมการใหม่จะได้ $(s^2+7s+6)i_2 = sV_S \longrightarrow \frac{d^2i_2}{dt^2} + 7\frac{di_2}{dt} + 6i_2 = sv_S$

2^{nd} Order Diff. Eq.

ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการอนุพันธ์สำหรับ v ในวงจรข้างล่าง



วิธีทำ *เขียนสมการ Node Voltage KCL :*

แทนค่า $\dfrac{d}{dt} = s$

$$\frac{v - v_s}{R_1} + i + C\frac{dv}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{v}{R_1} + i + Csv = \frac{v_S}{R_1}$$

และแรงดัน v คือ $$Ri + L\frac{di}{dt} = v \longrightarrow -v + Ri + Lsi = 0$$

แทนค่า R_1, L, R, C *และหาคำตอบ* $$v = \frac{(s+1000)v_S}{s^2 + 1001s + 1001\times 10^{-3}}$$

จัดสมการใหม่จะได้ $$(s^2 + 1001s + 1001\times 10^3)v = (s+1000)v_S$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 1001\frac{dv}{dt} + 1001\times 10^3 v = \frac{dv_S}{dt} + 1000v_s$$ ***2nd Order Diff. Eq.***

4. การหาคำตอบสมการอนุพันธ์อันดับสอง(Solution 2nd diff equation)

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=f(t)$$

In circuits language:

natural response

forced response

Complete solution: $x = x_h + x_p = x_n + x_f$

Homogeneous solution:

หรือ Natural Response

คือกรณี ไม่ป้อนอินพุท

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=0 \qquad \boxed{f(t)=0}$$

Characteristic Equation: $a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$

Roots: $s_{1,2}=\dfrac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$

where $\alpha=\dfrac{a_1}{2a_2}$ and $\omega_0=\sqrt{\dfrac{a_0}{a_2}}$

คำตอบสมการแบบ Homogeneous Solution หรือ Natural Response

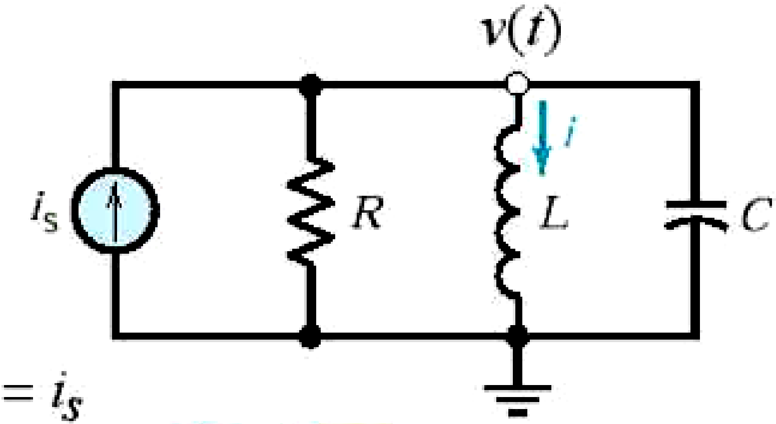
	Condition	s_1, s_2	Homogeneous Solution x_h
1.กรณีที่รากไม่เท่ากัน	$a_1^2 > 4a_0a_2$	$s_1 \neq s_2$ (real roots) $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$	$A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$
2.กรณีที่รากเท่ากัน	$a_1^2 = 4a_0a_2$	$s_1 = s_2 = -\alpha$	$A_1e^{s_1t} + A_2te^{s_2t}$
3.กรณีที่รากเป็น Complex	$a_1^2 < 4a_0a_2$	$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$ $j = \sqrt{-1}$ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ (complex conjugate roots)	$e^{-\alpha t}[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]$

Recall: $\alpha = \dfrac{a_1}{2a_2}$ and $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{a_0}{a_2}}$

Note: The constants A_1 and A_2 are determined by using the initial conditions $x(0)$ and $\dfrac{dx(0)}{dt}$ in the general solution $x(t) = x_h + x_f$

ตัวอย่างที่ 5 เพื่อศึกษา natural response ของ v(t)

Study the natural response $v(t)$ of the following circuit.



KCL at top node: $\frac{v}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau + i(0) + C\frac{dv}{dt} = i_s$

Differentiating we get $\quad \underbrace{C}_{a_2}\frac{d^2v}{dt^2}+\underbrace{\frac{1}{R}}_{a_1}\frac{dv}{dt}+\underbrace{\frac{1}{L}}_{a_0}v=\frac{di_s}{dt}$

แทนค่า $\quad \frac{d}{dt}=s$

Characteristic Equation: $\quad Cs^2+\frac{1}{R}s+\frac{1}{L}=0$

$$s_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

กรณีที่ 5.1 รากของสมการทั้งสองไม่เท่ากัน $s_1 \neq s_2$

Characteristic Equation: $Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} = 0$

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

เมื่อ $\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ or $\boxed{R < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

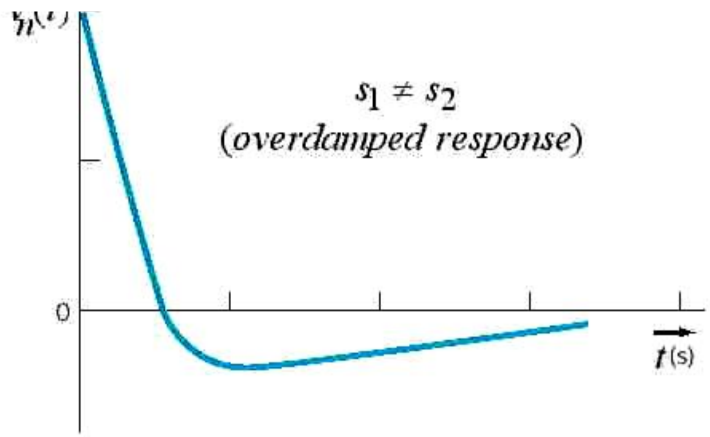
or $\boxed{R < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

$$v_n(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

$t + A_2e^{s_2t}$

ค่า A_1, A_2 หาได้จาก initial condition

Response จะได้ดังรูป



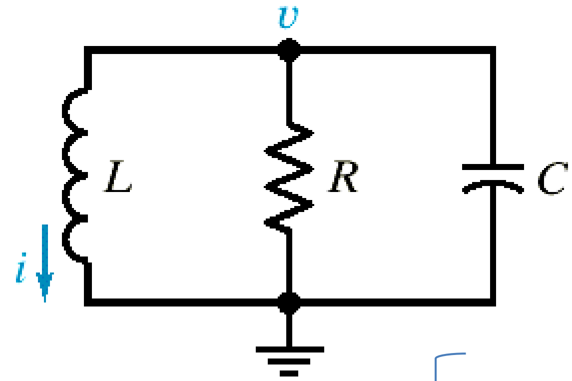
Workbench demo
Run file: ovrdmp

ตัวอย่าง

R = 2/3 W

L = 1 H

C = 1/2 F



initial condition

v(0)= 10 V

i(0)= 2 A

แทนค่าจะได้สมการ $$s^2 + 3s + 2 = 0$$ *คำตอบ s* $\begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \end{cases}$

Homogeneous Solution : $$v_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$v_n(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

หาค่า A_1 ,A_2 หาได้จาก initial condition

1. Initial condition v(0) = 10 V เมื่อ t=0

$$v_n(0) = A_1 e^{-0} + A_2 e^{-2(0)}$$

$$A_1 + A_2 = 10 \qquad \text{......... (1)}$$

จากวงจรสามารถเขียนสมการได้ KCL

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + i = 0$$

หาค่า A_1 ,A_2 หาได้จาก initial condition

1. Initial condition v(0) = 10 V เมื่อ t=0

$$v_n(0) = A_1e^{-0} + A_2e^{-2(0)}$$

$$A_1 + A_2 = 10 \quad .... \textit{(1)}$$

2. Initial condition $\dfrac{dv(0)}{dt}$ *เมื่อ t=0*

จาก homogeneous solution $\dfrac{dv_n}{dt}$

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \frac{d(A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t})}{dt}$$

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = s_1A_1e^{s_1t} + s_2A_2e^{s_2t}$$

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = s_1A_1e^{s_10} + s_2A_2e^{s_20}$$

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = s_1A_1 + s_2A_2 \quad .... \textit{(2)}$$

จากสมการของวงจร

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + i = 0 \quad .... \textit{(3)}$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C}$$

จากสมการ (2) =(3)

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = s_1A_1 + s_2A_2 = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C}$$

แทนค่า

$$-A_1 - 2A_2 = -\frac{10}{1/3} - \frac{2}{1/2} \quad .... \textit{(4)}$$

จากสมการ (1) และ (4) หาค่า A_1 และ A_2

$$A_1 = -14 \qquad A_2 = 24$$

คำตอบ homogeneous solution

$$\boxed{v_n(t) = -14e^{-t} + 24e^{-2t}}$$

กรณีที่ 5.2 รากของสมการทั้งสองเท่ากัน $S_1 = S_2$

Characteristic Equation: $Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} = 0$

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

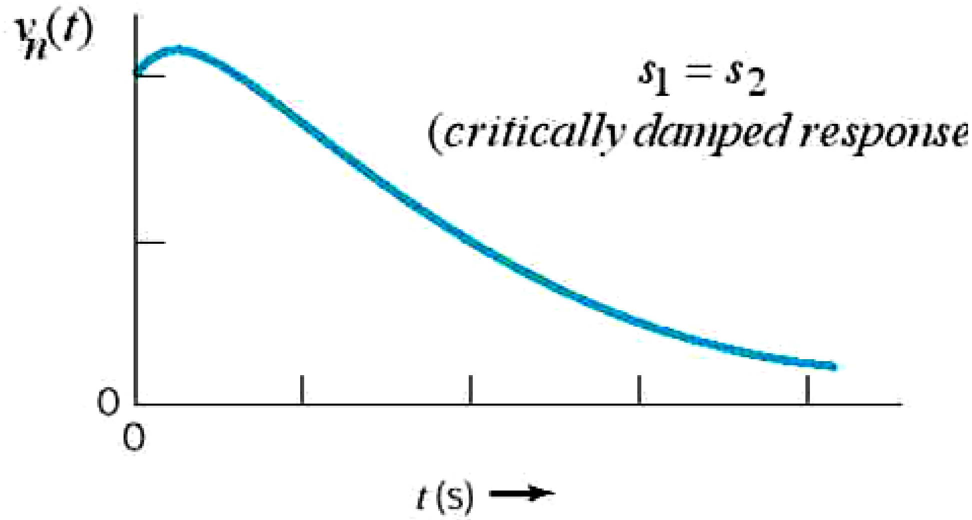
เมื่อ

$$\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = \frac{1}{LC} \quad or \quad \boxed{R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$v_n(t) = A_1e^{s_1t} + A_2te^{s_2t}$$

ค่า A_1, A_2 หาได้จาก initial condition

Response จะได้ดังรูป



Natural Response $s_1 = s_2$

Sum of 2 exponentials

$$v_n = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_1 t} = (A_1 + A_2)e^{s_1 t}$$

$$= A_3 e^{s_1 t}$$

เนื่องจากรากทั้งสองมีค่าเท่ากัน ดังนั้นเราจะได้ค่าคงที่เพียงค่าเดียว แต่มีเงื่อนไขเริ่มต้นที่จะต้องเป็นจริงสองตัว ดังนั้น A_3 จะต้องถูกเปลี่ยนเป็นฟังชั่น g(t) แทน

$$x_n = g(t)e^{s_1 t}$$

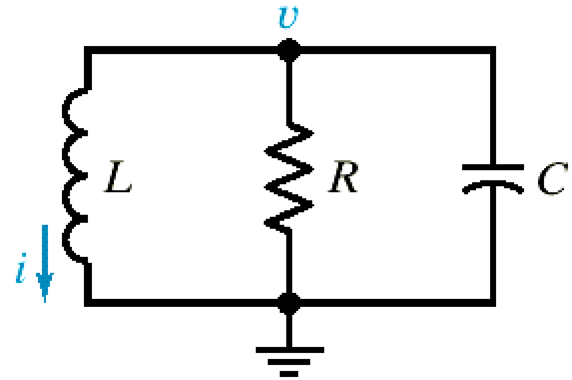
$$g(t) = A_2 + A_1 t \rightarrow a\ \ polynomial$$

ตัวอย่าง

R = 1 W

L = 1 H

C = 1/4 F



initial condition

v(0)= 5 V

i(0)= -6 A

แทนค่าจะได้สมการ $s^2 + 4s + 4 = 0$ *คำตอบ s* $s_1 = s_2 = -2$

Homogeneous Solution : $v_n(t) = A_2 e^{s_1 t} + A_1 t e^{s_1 t}$

$$v_n(t) = A_2 e^{-2t} + A_1 t e^{-2t}$$

หาค่า A_1 ,A_2 หาได้จาก initial condition

1. Initial condition v(0) = 5 V เมื่อ t=0 $v_n(0) = A_2 e^{-2(0)} + A_1 (0) e^{-2(0)}$

$A_2 = 5$ .... *(1)*

จากวงจรสามารถเขียนสมการได้ KCL $C\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{R} + i = 0$

หาค่า A_1, A_2 หาได้จาก initial condition

2. Initial condition $\dfrac{dv(0)}{dt}$ เมื่อ t=0

จาก homogeneous solution $\dfrac{dv_n}{dt}$

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \frac{d(A_1te^{-2t} + A_2e^{-2t})}{dt}$$

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = -2A_1te^{-2t} + A_1e^{-2t} - 2A_2e^{-2t}$$

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = A_1 - 2A_2 \qquad \text{......... (2)}$$

จากสมการของวงจร

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + i = 0$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \qquad \text{......... (3)}$$

จากสมการ (2) =(3)

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = A_1 - 2A_2 = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C}$$

แทนค่า $A_1 - 2A_2 = -\dfrac{5}{1/4} - \dfrac{-6}{1/4} = 4$ .... (4)

จากสมการ (1) และ (4) หาค่า A_1 และ A_2

$$A_1 = 14 \qquad A_2 = 5$$

คำตอบ homogeneous solution

$$\boxed{v_n(t) = 14te^{-2t} + 5e^{-2t} = (14t+5)e^{-2t}}$$

กรณีที่ 5.3 รากของสมการทั้งเป็น Complex number

Characteristic Equation: $Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} = 0$

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$(iii) \qquad \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 < \frac{1}{LC} \quad or \quad \boxed{R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

เมื่อ

$$y_n(t) = e^{-\alpha t}[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]$$

ค่า A_1, A_2 หาได้จาก initial condition

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

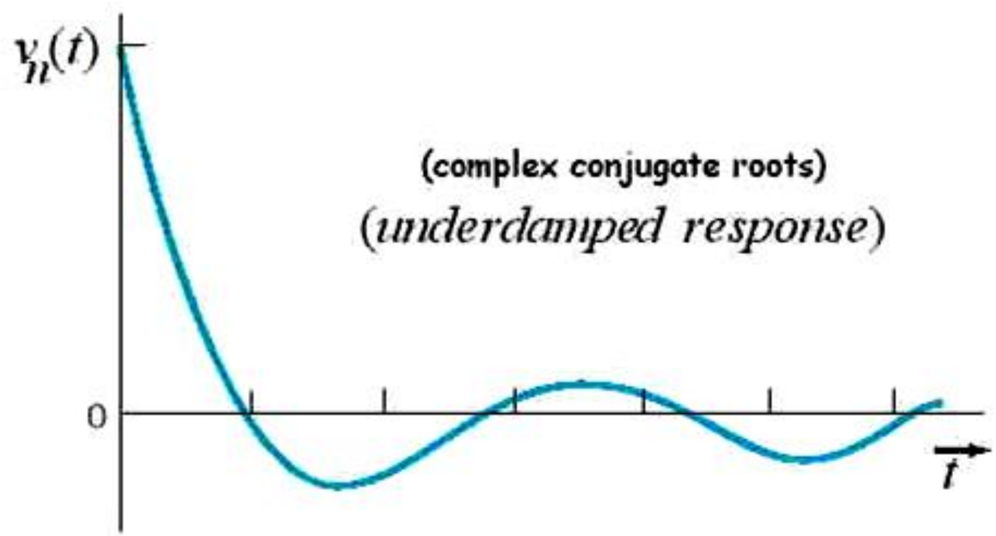
$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$\omega_d = Damped\ resonant\ frequency$

$\alpha = Damping\ Coefficient$

Response จะได้ดังรูป



Natural Response

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$v_n = A_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t}$$

$$= e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t})$$

ใช้สมการ Euler

$$e^{\pm j\omega t} = \cos\omega t \pm j\sin\omega t$$

แทนค่าในสมการจะได้

$$v_n = e^{-\alpha t}(A_1\cos\omega_d t + jA_1\sin\omega_d t + A_2\cos\omega_d t - jA_2\sin\omega_d t$$

$$= e^{-\alpha t}[\underbrace{(A_1 + A_2)}_{B_1}\cos\omega_d t + \underbrace{j(A_1 - A_2)}_{B_2}\sin\omega_d t]$$

$$v_n(t) = e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t)$$

$$v_n(0) = B_1 \quad \rightarrow \quad (1)$$

หาค่า B_1, B_2 หาได้จาก initial condition

1. Initial condition v(0) เมื่อ t=0

$$v_n(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t)$$

$$B_1 = v_n(0) \qquad \text{......... (1)}$$

2. Initial condition $\dfrac{dv(0)}{dt}$ เมื่อ t=0

จาก homogeneous solution $\dfrac{dv_n}{dt}$

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \frac{de^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t)}{dt}$$

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = e^{-\alpha t}\left[(\omega_d B_2 - \alpha B_1)\cos\omega_d t - (\omega_d B_1 + \alpha B_2)\sin\omega_d t\right]$$

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = \omega_d B_2 - \alpha B_1 \qquad \text{......... (2)}$$

จากสมการของวงจร

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + i = 0$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \qquad \text{......... (3)}$$

จากสมการ (2) =(3)

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = \omega_d B_2 - \alpha B_1 = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C}$$

$$\omega_d B_2 - \alpha B_1 = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \qquad \text{......... (4)}$$

จากสมการ (1) และ (4) หาคำตอบ homogeneous solution

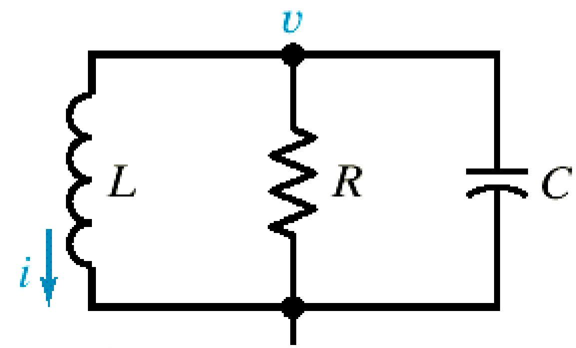
$$v_n(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t)$$

ตัวอย่าง

$R = 25/3\ W$

$L = 0.1\ H$

$C = 1\ mF$



initial condition

$v(0) = 10\ V$

$i(0) = -0.6\ A$

Characteristic Equation: $Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} = 0$

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

แทนค่าจะได้สมการ $s^2 + 120s + 100 = 0$

หาคำตอบ s

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 60$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^4$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 80\, rad/\sec$$

$$s_1 = -60 + j80$$

$$s_2 = -60 - j80$$

หาค่า B_1, B_2 หาได้จาก initial condition

1. Initial condition v(0) เมื่อ t=0

$$v_n(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t)$$

$$B_1 = v_n(0) = 10 \qquad \text{.........} \ (1)$$

2. Initial condition $\frac{dv(0)}{dt}$ เมื่อ t=0

จาก homogeneous solution $\frac{dv_n}{dt}$

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \frac{de^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t)}{dt}$$

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = e^{-\alpha t}\left[(\omega_d B_2 - \alpha B_1)\cos\omega_d t - (\omega_d B_1 + \alpha B_2)\sin\omega_d t)\right]$$

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = \omega_d B_2 - \alpha B_1 \qquad \text{.........} \ (2)$$

จากสมการของวงจร

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + i = 0$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \qquad \text{.........} \ (3)$$

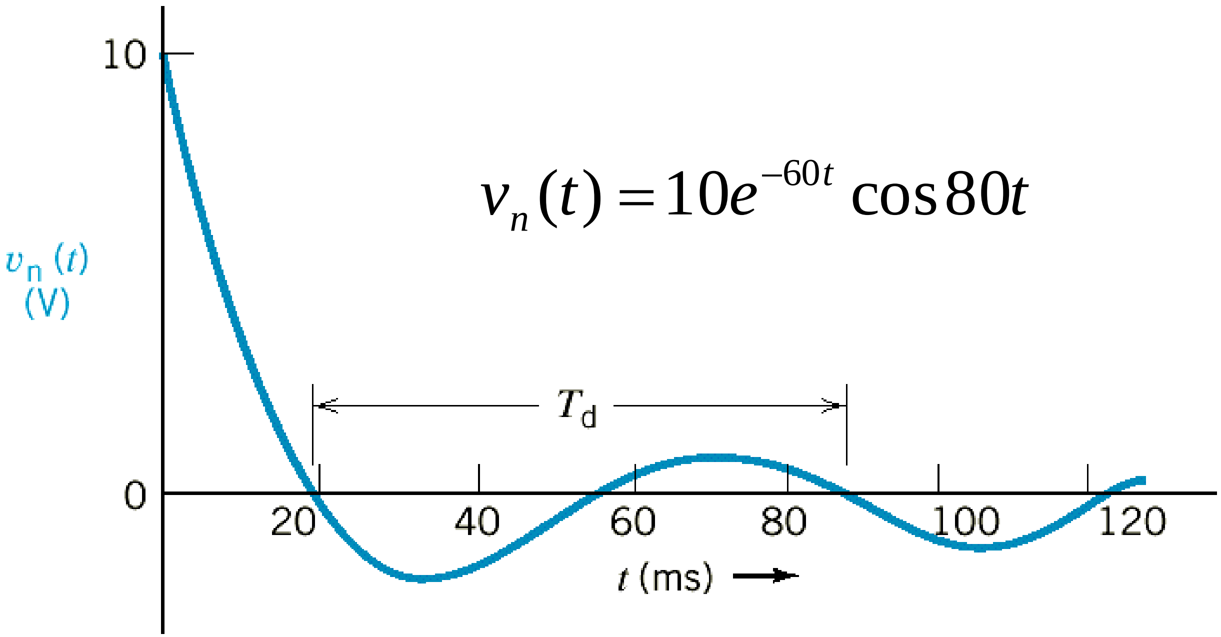
จากสมการ (2) =(3)

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = \omega_d B_2 - \alpha B_1 = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C}$$

$$B_2 = \frac{\alpha B_1}{\omega_d} - \frac{v(0)}{\omega_d RC} - \frac{i(0)}{\omega_d C} \qquad \text{.........} \ (4)$$

จากสมการ (1) และ (4) หาคำตอบ homogeneous solution $B_2 = 7.5 - 15 + 7.5 = 0$

$$v_n(t) = 10e^{-60t}\cos 80t$$



Period and frequency of the damped oscillation

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad s$$

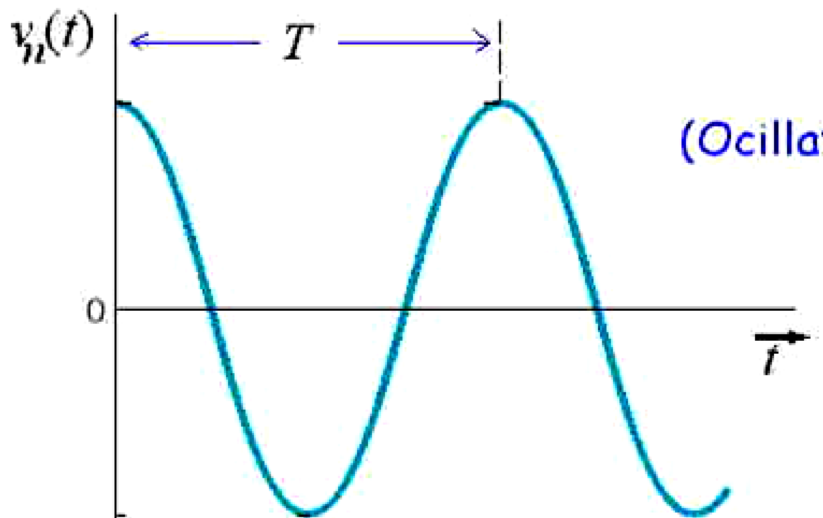
$$f_d = \frac{1}{T_d} \quad Hz$$

กรณีที่การเกิด Oscillation *เมื่อ* $R = \infty$ (open circuit)

Special Case:

$R \to \infty$ (i.e., circuit is pure LC): $\alpha = 0$ and $\omega_d = \omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$

$$v_n(t) = e^{-\alpha t}\left[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)\right]$$
$$= \quad \left[A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)\right]$$



(Ocillator)

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}$$

$$v_n(t) = 10e^{-0t}\cos 80t = 10\cos 80t$$

$$frequency = f = \frac{1}{T} \quad (\text{unit } 1/s \text{ or Hz})$$

Workbench demo
Run file: oscl.ca4

5. ผลตอบสนองกระตุ้น(Force Response)

กรณีที่เราทำการป้อนแรงดันหรือกระแสกระตุ้นเข้าในวงจร RLC

พิจารณาสมการ Diff Equation 2 Order

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

ผลตอบสนองการกระตุ้นเข้าในวงจรคือ x_f

แทนค่า x_f *ลงในสมการ diff eq. สมการจะต้องเป็นจริง*

$$\frac{d^2x_f}{dt^2} + a_1\frac{dx_f}{dt} + a_0 x_f = f(t)$$

ถ้าป้อนอินพุทเป็นค่าคงที่ $f(t) = K$ *ผลตอบสนองการกระตุ้นเราคาดว่าเท่ากับ* $x_f = B$

ถ้าป้อนอินพุทเป็นค่าคงที่ $f(t) = Ae^{-at}$ *ผลตอบสนองการกระตุ้นเราคาดว่าเท่ากับ* $x_f = Be^{-at}$

การหาค่า particular solution หรือ force response

particular solution (x_p) จะมีค่าขึ้นอยู่กับ $f(t)$ เป็นไปตามตารางข้างล่าง

	$f(t)$	Particular Solution x_p
กรณีที่ 1 ป้อนไฟ DC	K	B
กรณีที่ 2 ป้อนไฟ Ramp	Kt	$B_1t + B_2$
กรณีที่ 3 ป้อนไฟ Exponential	Ke^{-at}	
	$(i)\ a \neq s_1$ and $a \neq s_2$	Be^{-at}
	$(ii)\ a = s_1$ or $a = s_2,\ (s_1 \neq s_2)$	Bte^{-at}
	$(iii)\ a = s_1 = s_2$	Bt^2e^{-at}
กรณีที่ 4 ป้อน Sin หรือ Cos	$K\sin(\omega t)$ or $[K\cos(\omega t)]$	$B_1\sin(\omega t) + B_2\cos(\omega t)$

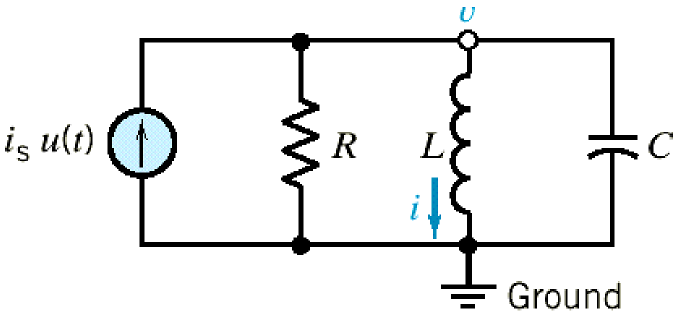
เมื่อ K , B คือค่าคงที่

ตัวอย่างเช่น ถ้าป้อน input $f(t) = K$

particular solution $x_p = B$

แล้วคำนวณหาค่า x_p ต่อไป

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลตอบสนองกระตุ้นของกระแสในตัวเหนี่ยวนำ $i_f(t)$ เมื่อ t > 0



กำหนดให้

$$i_s = 8e^{-2t} \quad A,\ R = 6\Omega,\ C = \frac{1}{42}F,\ L = 7H$$

วิธีทำ

KCL : $$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + i = i_S \qquad \text{......... (1)}$$

แต่ $$v = L\frac{di}{dt} \qquad \text{......... (2)}$$

แทนค่าใน (1) $$LC\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = i_S$$

สมการ Second Order Differential Equation

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{i_S}{LC} \qquad \text{......... (3)}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{i_S}{LC} \qquad \text{.........} \; (3)$$

แทนค่าต่างๆใน (3)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 6i = 48e^{-2t} \qquad \text{.........} \; (4)$$

* หาผลตอบสนองการกระตุ้น(Force Response หรือ Particular Solution) $i_f = Be^{-2t}$

แทนค่าในสมการ (4)

$$\frac{d^2 Be^{-2t}}{dt^2} + 7\frac{dBe^{-2t}}{dt} + 6Be^{-2t} = 48e^{-2t}$$

$$4Be^{-2t} + 7(-2Be^{-2t}) + 6Be^{-2t} = 48e^{-2t}$$

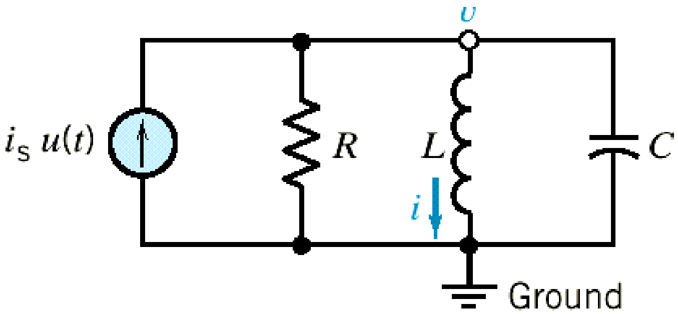
$$(4 - 14 + 6)Be^{-2t} = 48e^{-2t}$$

$$B = -12$$

$\therefore$ ผลตอบสนองการกระตุ้น(Force Response)

$$i_f = -12e^{-2t} \qquad Ans$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลตอบสนองกระตุ้นของกระแสในตัวเหนี่ยวนำ $i_f(t)$ เมื่อ t > 0



กำหนดให้

$$i_s = I_0 \quad A \quad , R = 6\Omega, C = \frac{1}{42}F, L = 7H$$

วิธีทำ

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{i_S}{LC} \qquad \text{......... (1)}$$

แทนค่าต่างๆใน (1)

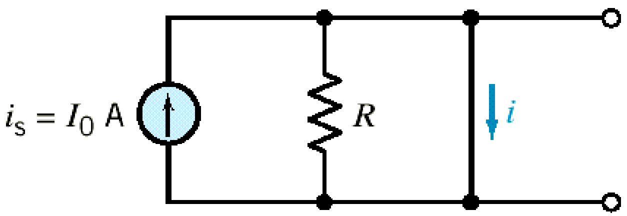
$$\frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 6i = 6I_0 \qquad \text{......... (2)}$$

** หาผลตอบสนองการกระตุ้น(Force Response หรือ Particular Solution)* $i_f = B$

แทนค่าในสมการ (2)

$$\frac{d^2B}{dt^2} + 7\frac{dB}{dt} + 6B = 6I_0$$

$$B = I_0$$

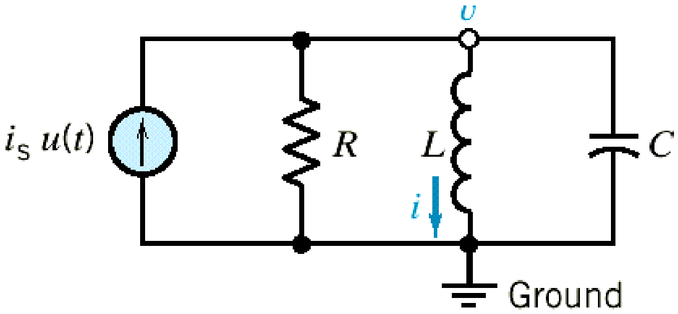


$\therefore$ *ผลตอบสนองการกระตุ้น(Force Response)*

L เปรียบเสมือน short cct เมื่อ $t = \infty$

$$i_f = I_0 \qquad Ans$$

ตัวอย่างที่ 8 จาก ต.ย ที่ 6 จงหาผลตอบสนองกระตุ้นของกระแสในตัวเหนี่ยวนำ $i_f(t)$ เมื่อ $t > 0$



กำหนดให้

$$R = 6\Omega, C = \frac{1}{42}F, L = 7H$$

เมื่อ $i_S = 3e^{-6t}$

กรณี s_1 หรือ s_2 เท่ากับ exponent input

วิธีทำ *สมการ Second Order Differential Equation*

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{i_S}{LC} \quad \text{......... (1)}$$

แทนค่าต่างๆใน (1)

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 6i = 6i_s \quad \text{......... (2)}$$

** หาผลตอบสนองการกระตุ้น(Force Response หรือ Particular Solution)* $i_f = Be^{-6t}$

แทนค่าในสมการ (2)

$$36Be^{-6t} - 42Be^{-6t} + 6Be^{-6t} \neq 18e^{-6t}$$

$$0 \neq 18e^{-6t}$$

สมการเป็นไปไม่ได้จึงต้องหาคำตอบรูปแบบใหม่

กำหนดค่าคำตอบรูปแบบใหม่เป็น

$$i_f = Bte^{-2t}$$

แทนค่าในสมการ (2)

$$B(-6e^{-6t} - 6e^{-6t} + 36te^{-6t}) + 7B(e^{-6t} - 6te^{-6t}) + 6Bte^{-6t} = 18e^{-6t}$$

หาค่า B : $B = -\dfrac{18}{5}$

$\therefore$ *ผลตอบสนองการกระตุ้น(Force Response)*

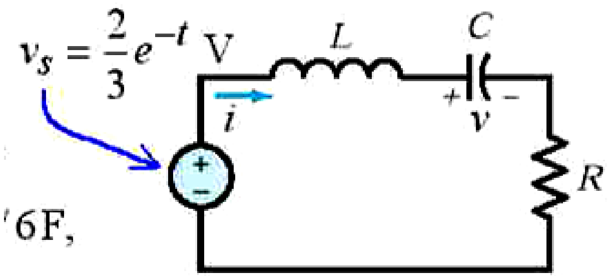
$$i_f = -\frac{18}{5}te^{-6t} \qquad Ans$$

6. ผลตอบสนองสมบูรณ์ (Complete Response)

การหาผลตอบสนองสมบูรณ์กรณีที่เราทำการป้อนแรงดันหรือกระแสกระตุ้นเข้าในวงจร RLC

พิจารณาสมการ Diff Equation 2 Order

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$



ผลตอบสนองสมบูรณ์คือ $x = x_n + x_f$

จากวงจรเขียนสมการ

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = v_S(t)$$

ถ้ากำหนดให้ $R = 5\Omega$, $L = 1H$, $C = 1/6\ F$ $\quad v_S(t) = \frac{2}{3}e^{-t}$

กำหนดให้ Initial condition $v(0) = 10V$ *และ* $i(0) = -1/3\ A$

แทนค่าลงในสมการ diff eq. สมการจะต้องเป็นจริง

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 5\frac{dv}{dt} + 6v = 6v_S(t)$$

1. หาค่าผลตอบสนองธรรมชาติ (Natural Response)

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$ คำตอบ s $$s_1 = -2 \;,\; s_2 = -3$$

$$v_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

คำตอบ $$v_n(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}$$ .... (1)

2. หาค่าผลตอบสนองกระตุ้น (Force Response) $$v_f(t) = Be^{-t}$$

แทนค่าลงในสมการ diff eq. สมการ

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 5\frac{dv}{dt} + 6v = 6v_S(t)$$

$$Be^{-t} + 5(-Be^{-t}) + 6(Be^{-t}) = 4e^{-t}$$

$$B = 2$$

คำตอบ $$v_f(t) = 2e^{-t}$$ .... (2)

3.ผลตอบสนองสมบูรณ์ (Complete Response) คือ $$v = v_n + v_f$$

$$v(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t} + 2e^{-t}$$ .... (3)

หาค่า A_1, A_2 หาได้จาก initial condition

1. Initial condition v(0) = 10 V เมื่อ t=0 $v(0) = A_1 e^{-2(0)} + A_2 e^{-3(0)} + 2e^{-0} = 10$

จากสมการ (3) $A_1 + A_2 = 8$ .... (4)

2. Initial condition i(0) = -1/3 Aเมื่อ t=0

จากวงจร $i(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt} \longrightarrow i(0) = C\dfrac{dv(0)}{dt}$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -2$$

จากสมการ (3) diff : $\dfrac{dv(t)}{dt} = \dfrac{d(A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t} + 2e^{-t})}{dt} = -2$

$-2A_1 - 3A_2 = 0$ .... (5)

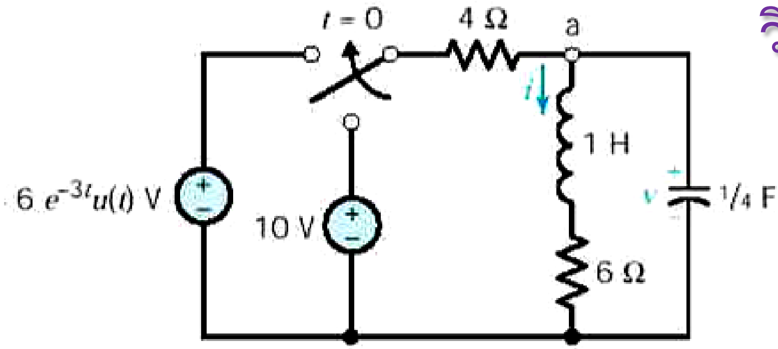
จากสมการ (4) และ (5) หาค่า A_1 , A_2 $A_1 = 24$, $A_2 = -16$

ผลตอบสนองสมบูรณ์ (Complete Response) คือ

$$v(t) = 24e^{-2t} - 16e^{-3t} + 2e^{-t} \qquad Ans$$

ตัวอย่างที่ 9

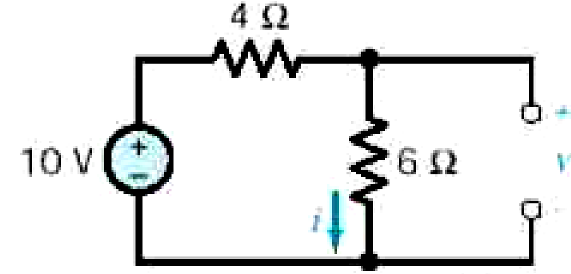
จงหาผลตอบสนองสมบูรณ์ของแรงดัน v(t) เมื่อ t > 0



วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1. หา initial condition

Initial condition ที่เวลา t = 0-



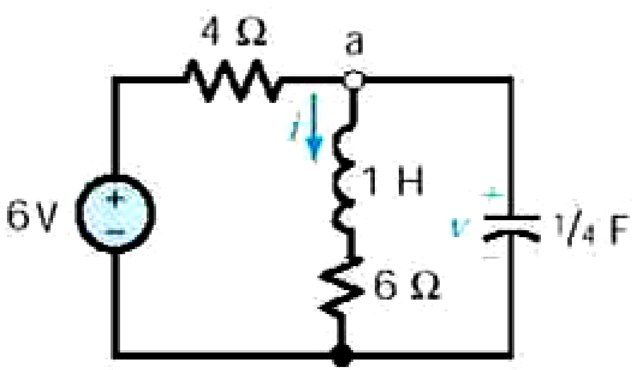
$$v(0^-) = \frac{6}{4+6} \times 10V = 6V$$

$$\boxed{v(0^+) = v(0) = v(0^-) = 6V}$$

$$i(0^-) = \frac{10V}{4\Omega + 6\Omega} = 1A$$

$$i(0^+) = i(0) = i(0^-) = 1A$$

วงจรที่เวลา t > 0+



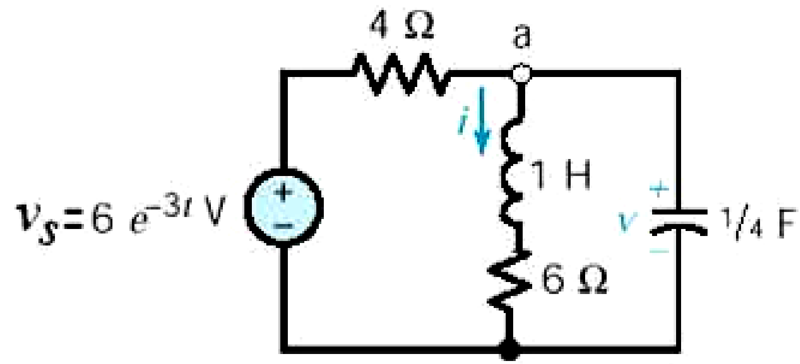
$$C\frac{dv}{dt} + i + \frac{v - v_s}{R} = 0$$

KCL $$C\frac{dv(0^+)}{dt} + i(0^+) + \frac{v(0^+) - 6}{4} = 0$$

$$\frac{1}{4}\frac{dv(0^+)}{dt} + 1 + \frac{6-6}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv(0^+)}{dt} = -4$$

<u>ขั้นตอนที่ 2.</u> หาสมการ diff equation

หาสมการจากวงจรเมื่อ t > 0



วงจรเมื่อ t > 0

KVL เขียนสมการลูปขวามือ

$$-v + \frac{di}{dt} + 6i = 0 \qquad \text{.........} \ (1)$$

KCL เขียนสมการที่โนด a

$$\frac{v - v_S}{4} + i + \frac{1}{4}\frac{dv}{dt} = 0 \qquad \text{.........} \ (2)$$

เขียนสมการ แบบใช้ตัวกระทำ (Operator Method)

จากสมการ (1) $\quad -v + si + 6i = 0$

จากสมการ (2) $\quad \frac{v}{4} + i + \frac{1}{4}sv = \frac{v_S}{4}$

หาค่า v จะได้ $\quad v = \frac{(s+6)v_S}{s^2 + 7s + 10} \Rightarrow (s^2 + 7s + 10)v = (s+6)v_S$

$$(s^2+7s+10)v=(s+6)v_S$$

เขียนสมการ diff. equation

$$\frac{d^2v}{dt^2}+7\frac{dv}{dt}+10v=\frac{dv_S}{dt}+6v_S$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}+7\frac{dv}{dt}+10v=-18e^{-3t}+36e^{-3t}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}+7\frac{dv}{dt}+10v=18e^{-3t}$$ .... (3)

ขั้นตอนที่ 3. หาคำตอบผลตอบสนองธรรมชาติ (Natural response)

จากสมการ(3) เขียน Characteristic equation และราก s

$$s^2+7s+10=0 \qquad Root: \quad s_1=-2, s_2=-5$$

Natural response $$v_n = A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}$$ .... (4)

ขั้นตอนที่ 4. หาคำตอบผลตอบสนองกระตุ้น (Force response)

จากสมการ(3) $$v_S = 6e^{-3t}$$

Force response $$v_f = Be^{-3t}$$

แทนค่าลงในสมการ diff eq.

$$9Be^{-3t} - 21Be^{-3t} + 10Be^{-3t} = 18e^{-3t} \quad \text{or} \quad B = -9$$

Force response $$v_f = -9e^{-3t} \qquad \text{......... (5)}$$

ขั้นตอนที่ 5. หาคำตอบผลตอบสนองสมบูรณ์ (Complete response)

$$v(t) = v_n + v_f = A_1e^{-2t} + A_2e^{-5t} - 9e^{-3t} \quad ,t > 0$$

$$v(t) = A_1e^{-2t} + A_2e^{-5t} - 9e^{-3t} \quad ,t > 0 \qquad \text{......... (6)}$$

หาค่า A_1, A_2 หาได้จาก initial condition

จากสมการ (6) $$v(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} - 9e^{-3t} \quad ,t > 0$$

1. Initial condition v(0) = 6V เมื่อ t=0 $$v(0) = 6 = A_1 + A_2 - 9$$

2. Initial condition $$\frac{dv(0^+)}{dt} = -4$$ เมื่อ t=0

$$\frac{dv(0)}{dt} = -4 = -2A_1 e^0 - 5A_2 e^0 + 27e^0$$

จัดสมการใหม่ $$A_1 + A_2 = 15$$

$$2A_1 + 5A_2 = 31$$

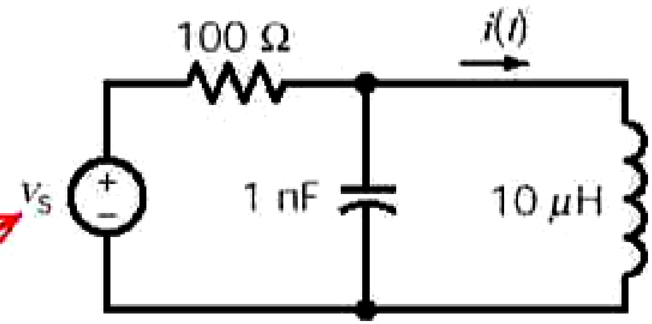
จะได้คำตอบ $$A_1 = \frac{44}{3} \qquad A_2 = \frac{1}{3}$$

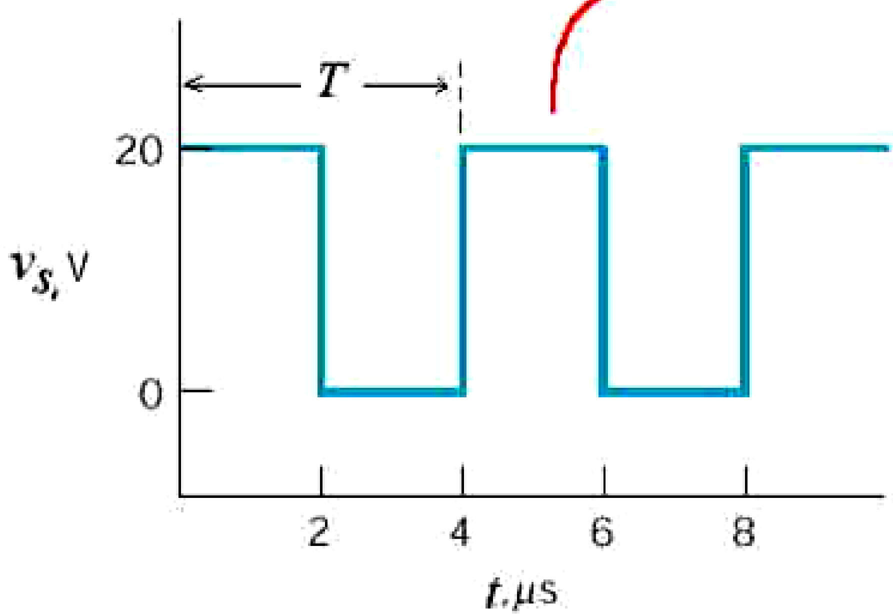
คำตอบผลตอบสนองสมบูรณ์ (Complete response)

$$v(t) = \frac{44}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-5t} - 9e^{-3t} \quad ,t > 0 \qquad Ans$$

ตัวอย่างวงจร RLC Circuit Response to a Square Wave Input

Use Workbench to determine the solution for the inductor current. Assume zero initial energy in the capacitor and inductor (i.e., zero initial conditions).

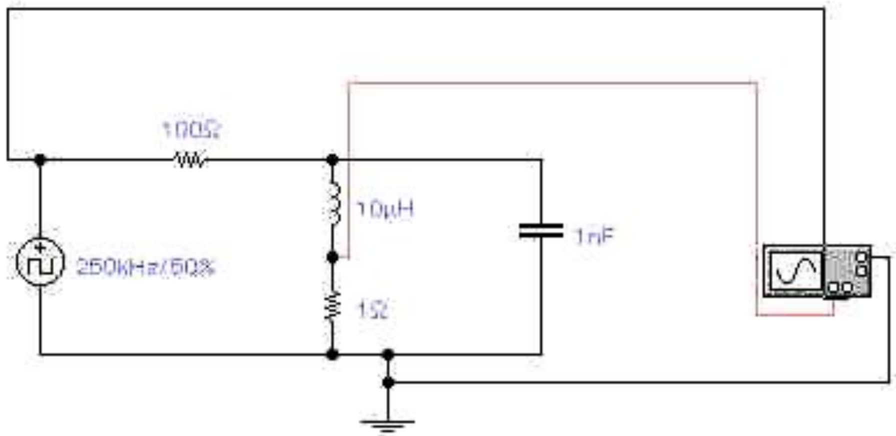




$T = 4\,\mu s$

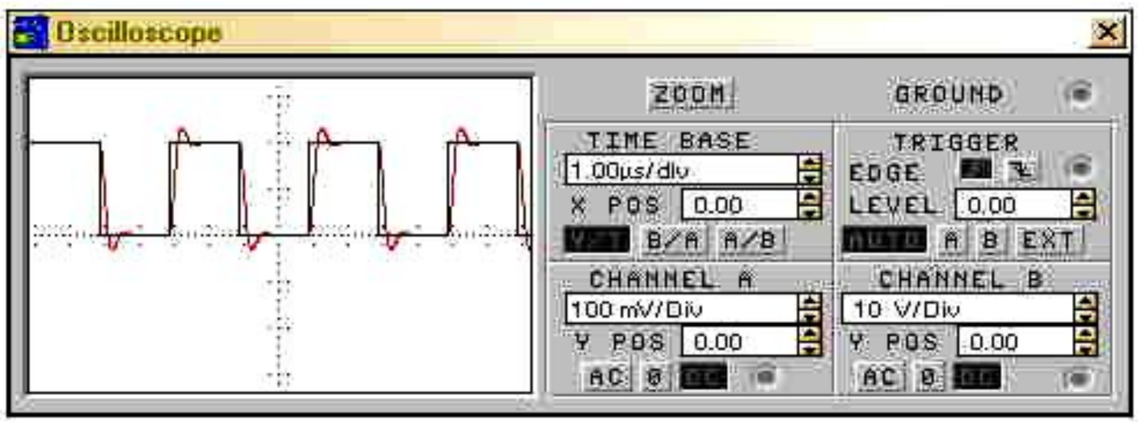
$frequency = 1/T = 250\,KHz$

Final Example: RLC Circuit Response to a Square Wave Input



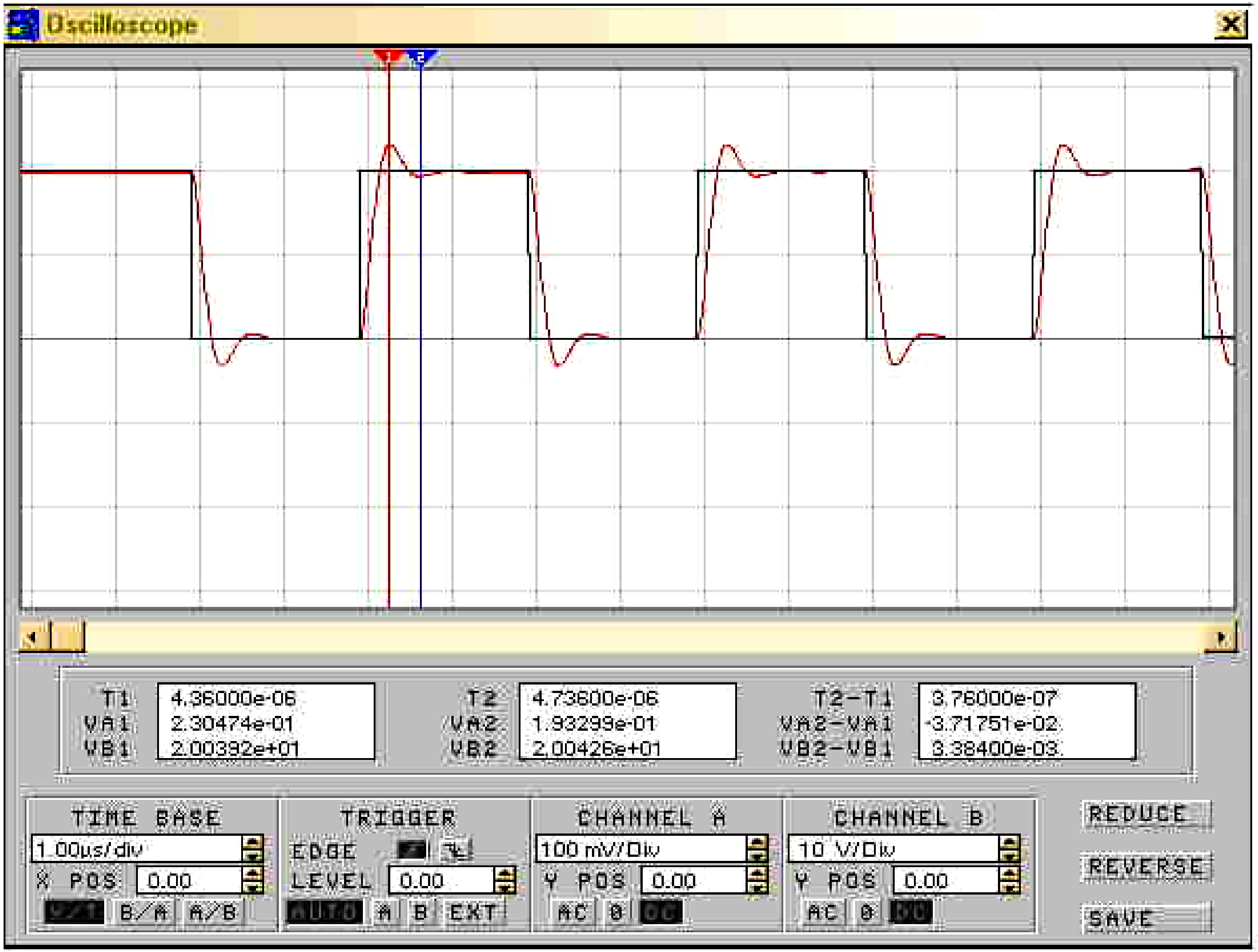
Description

The voltage across the very small resistor is proportional to the curren in the inductor.



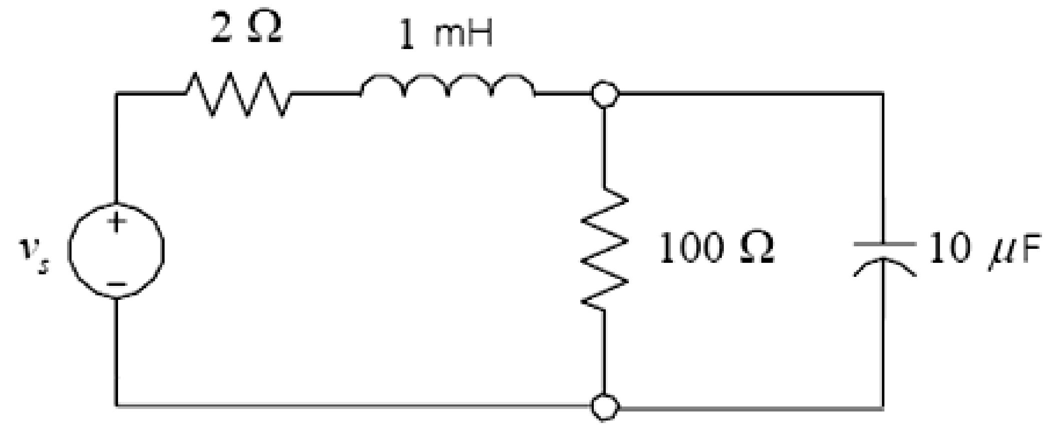
Run file: F9-13-1

Final Example: RLC Circuit Response to a Square Wave Input



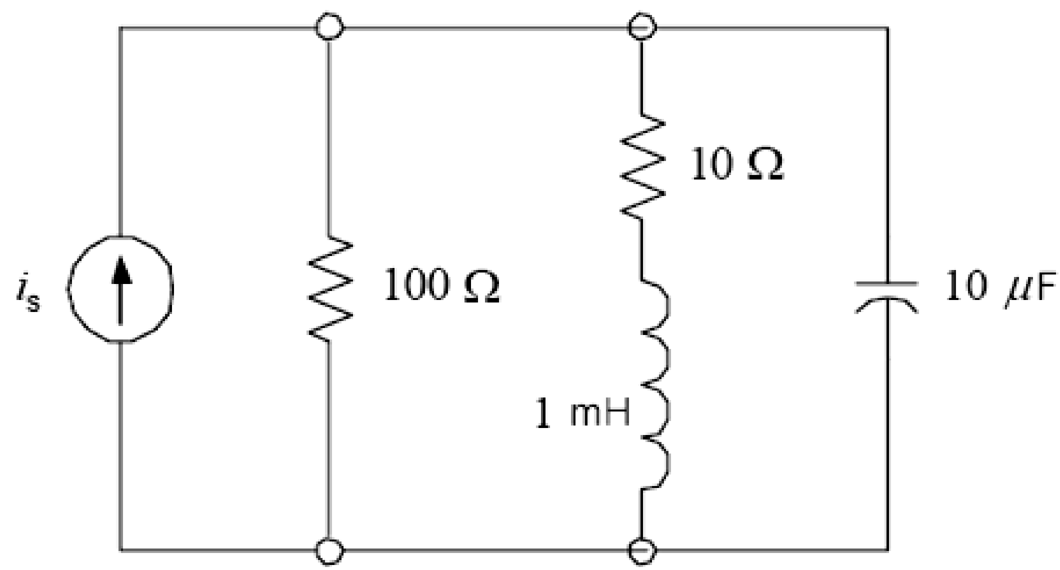
แบบฝึกหัด

1. จงหาสมการอนุพันธ์อันดับสองสำหรับวงจรในรูป P 8.1 โดยใช้วิธีตรง



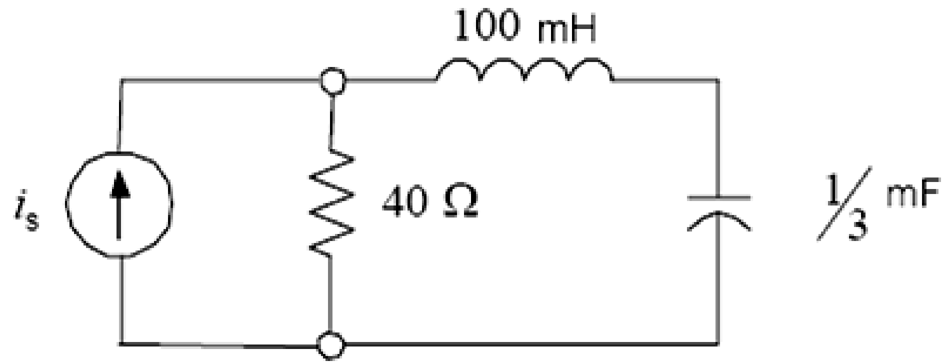
รูปที่ P 8.1

2. จงหาสมการอนุพันธ์อันดับสองสำหรับวงจรในรูป P 8.2 โดยใช้วิธีตัวกระทำ



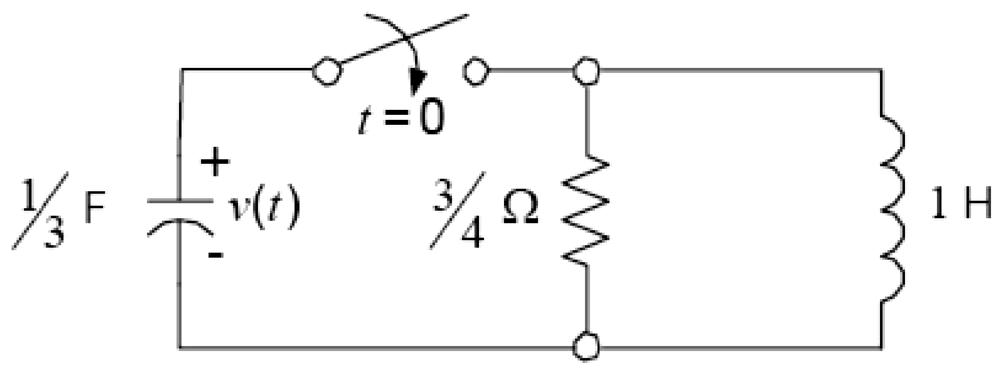
รูปที่ P 8.2

3. จงหาสมการคุณลักษณะและรากของสมการนี้สำหรับวงจรในรูป P 8.3



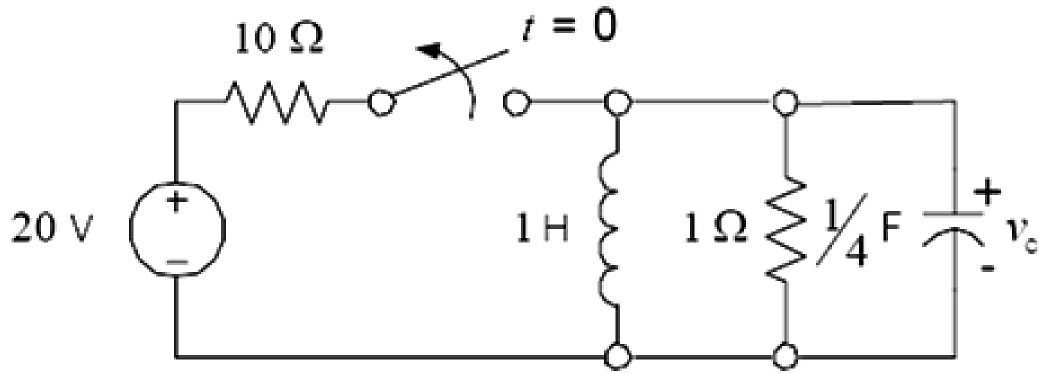
รูปที่ P 8.3

4. สำหรับวงจร RLC ดังแสดงในรูป P 8.4 เมื่อ $v(0) = 2$ V และสวิทช์อยู่ในตำแหน่งเปิดวงจรเป็นเวลานานก่อนจะปิดที่เวลา $t = 0$ จงหาค่าและเขียนกราฟของแรงดัน $v(t)$



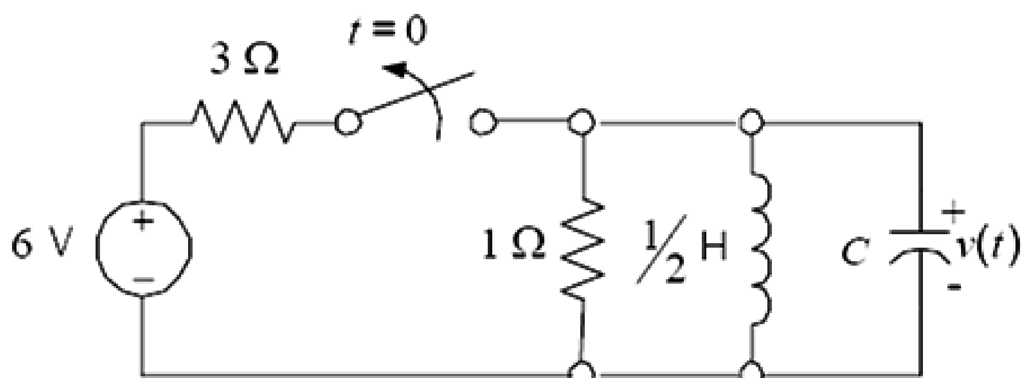
รูปที่ P 8.4

5. สำหรับวงจร RLC ดังแสดงในรูป P 8.5 จงหาค่าแรงดัน $v_C(t)$ สำหรับ $t > 0$ สมมติว่าวงจรอยู่ในสภาวะคงตัวเมื่อเวลา $t = 0^-$



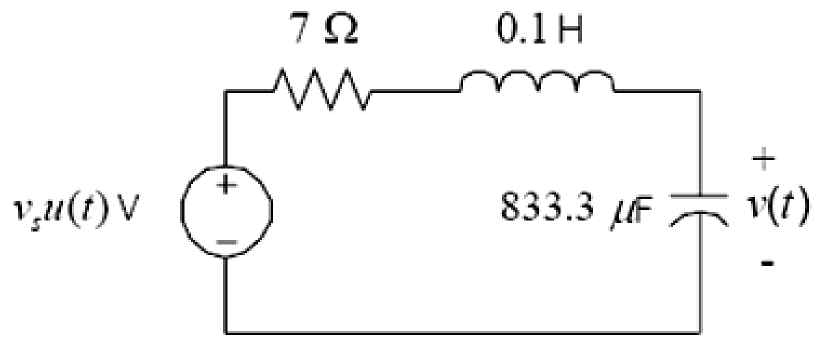
รูปที่ P 8.5

6. สวิทช์ในวงจร RLC ดังแสดงในรูป P 8.6 อยู่ในตำแหน่งปิดวงจรเป็นเวลานานก่อนจะเปิดที่เวลา $t = 0$ จงหาค่าและเขียนกราฟของแรงดัน $v(t)$ กำหนด $C = 1/4$ F



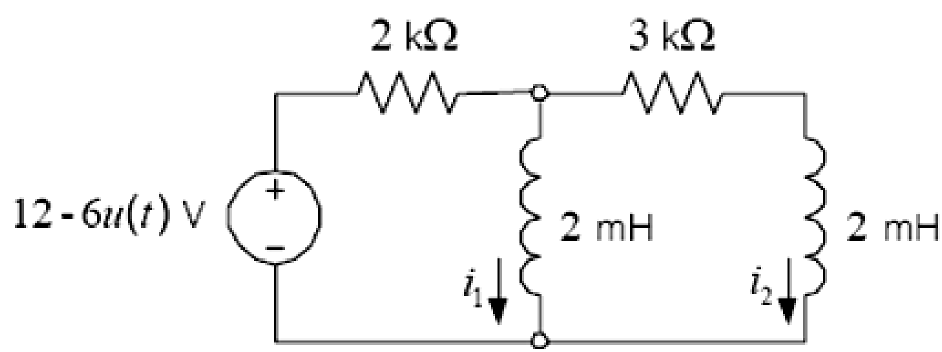
รูปที่ P 8.6

7. สำหรับวงจร RLC ดังแสดงในรูป P 8.7 จงหาค่าผลตอบสนองกระตุ้น $v_f(t)$ เมื่อ (ก) $v_s = 2$ V (ข) $v_s = 0.2t$ V (ค) $v_s = e^{-30t}$ V



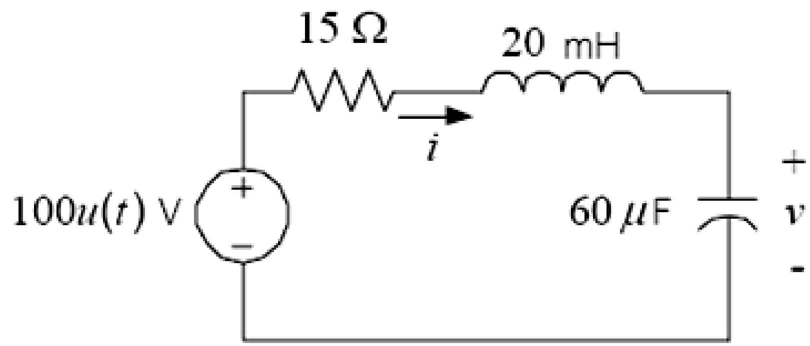
รูปที่ P 8.7

8. สำหรับวงจร RL ดังแสดงในรูป P 8.8 จงหาค่ากระแส $i_1(t)$ และ $i_2(t)$ สมมติว่าวงจรอยู่ในสภาวะคงตัวเมื่อเวลา $t = 0^-$



รูปที่ P 8.8

9. สำหรับวงจร RLC ดังแสดงในรูป P 8.9 จงหาค่าแรงดัน $v(t)$ และกระแส $i(t)$ สำหรับ $t > 0$



รูปที่ P 8.9