

บทที่ 3 จลศาสตร์ของอนุภาค

จลศาสตร์ของอนุภาค เป็นการศึกษาผลของแรงที่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาค การศึกษาในบทนี้เป็นการศึกษาการใช้งานของกฎข้อที่สองของนิวตัน ซึ่งเป็นกฎพื้นฐานของการศึกษาผลกระทบของแรงที่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาค การศึกษาผลกระทบของแรงที่มีต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาค สามารถแบ่งออกเป็น 3 แนวทางด้วยกัน คือ 1) การใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน 2) เป็นการใช้หลักของงานและพลังงาน และวิธีสุดท้ายเป็นการใช้หลักการดลและโมเมนตัม

3.1 การใช้กฎข้อที่สองของนิวตันในการวิเคราะห์โดยตรง

เมื่ออนุภาคที่มีมวล m ถูกกระทำด้วยแรงย่อย $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ ซึ่งมีผลรวมของแรงทั้งหมดเท่ากับ $\sum \vec{F}$ เราจะได้ความสัมพันธ์ของแรง แรงรวมและความเร่งของอนุภาค ดังนี้

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \dots \quad (3.1)$$

ในการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้ความสัมพันธ์ข้างต้น ให้ระลึกเสมอว่าสิ่งที่กำลังทำการวิเคราะห์นั้นเป็นปริมาณเวกเตอร์ จะสังเกตว่าสมการกฎข้อที่สองของนิวตันนั้นค่อนข้างสั้น ไม่น่าจะมีความยุ่งยากในการคำนวณ แต่ในความเป็นจริงการคำนวณเป็นเรื่องที่ยุ่งยากแล้วแต่ในกรณีและความยุ่งยากไม่ได้เกิดจากความยุ่งยากของสมการ แต่เกิดจากการไม่เข้าใจลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาค ซึ่งความยุ่งยากเหล่านี้จะหมดไป ถ้ามีการฝึกหัดวิเคราะห์ปัญหา

ก่อนที่จะพูดถึงวิธีการแก้ปัญหา มีสิ่งบางสิ่งที่เกี่ยวข้องกับแรงและการเคลื่อนที่ที่ควรจะต้องทำความเข้าใจ ดังนี้

1) แรงเสียดทาน (Friction force)

แรงเสียดทานเป็นแรงที่เกิดขึ้นระหว่างผิวสองผิวที่สัมผัสกัน เป็นแรงที่ต้านการเคลื่อนที่ของผิวสองผิวที่สัมผัสกัน แรงเสียดทานสามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภทด้วยกัน ดังนี้

1.1) แรงเสียดทานสถิตย (Static friction) หรือ f_s

เป็นแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นระหว่างผิวสัมผัสสองผิวโดยที่ผิวสัมผัสทั้งสองผิวเคลื่อนที่ไปด้วยกัน กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ไม่มีการลื่นไถลระหว่างผิวสัมผัสทั้งสอง (no-slip) โดยปกติแล้วแรงเสียดทานสถิตยจะมีค่าสูงที่สุด ขนาดของแรงเสียดทานสถิตยนั้นจะขึ้นอยู่กับขนาดของแรงที่มากระทำ สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$0 \leq f_s \leq f_{s \max}$$

$$f_{s \max} = \mu_s N$$

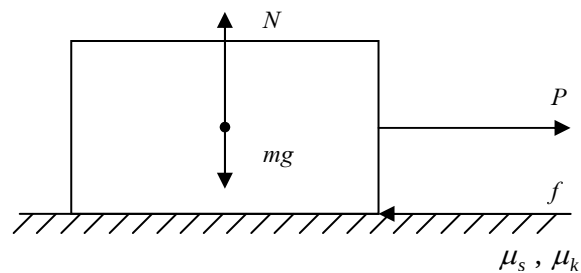
เมื่อ μ_s คือสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตย
 N คือแรงที่ตั้งฉากระหว่างผิวสัมผัสทั้งสอง

1.2) แรงเสียดทานจลน์ (Kinetic friction) หรือ f_k

เป็นแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นระหว่างผิวสองผิวที่ผิวสัมผัสกัน โดยที่ผิวสองผิวนั้นมีการลื่นไถล (slip) ซึ่งแรงเสียดทานจลน์โดยทั่วไปจะมีค่าน้อยกว่าแรงเสียดทานสถิตย แรงเสียดทานจลน์จะมีค่าเพียงค่าเดียว ดังสมการข้างล่าง

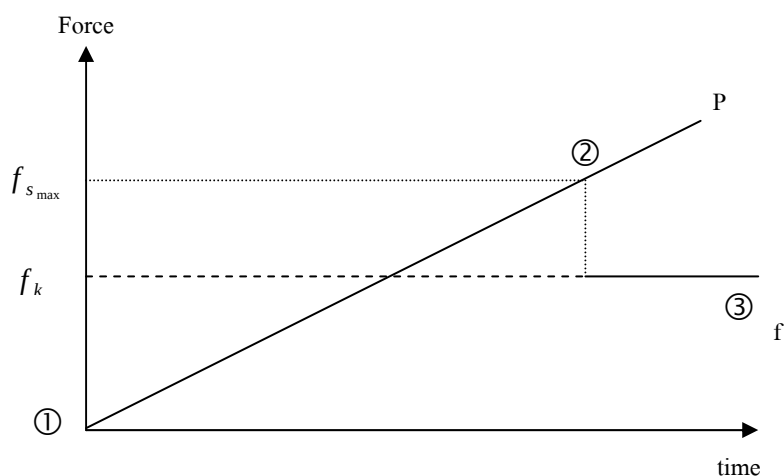
$$f_k = \mu_k N$$

เพื่อความเข้าใจที่ชัดเจนกับแรงเสียดทาน ให้พิจารณาการออกแรง P ถึงกล่องที่วางนิ่งอยู่บนพื้นดังรูป



รูปที่ 3.1

กำหนดให้แรง P มีค่าเพิ่มขึ้นเป็นเส้นตรงดังรูป



รูปที่ 3.2

ในการออกแรงดึงกล่องที่วางนิ่งอยู่กับที่ ช่วงจากจุด ① ไปยัง ② ช่วงนี้ยังไม่มี การเคลื่อนที่ แรงเสียดทานที่พื้นเป็นแรงเสียดทานสถิตย์ และมีค่าเท่ากับแรงดึง P ที่มากระทำ เมื่อเพิ่มแรง P ขึ้นจนถึงจุดที่แรงเสียดทานสถิตย์มีค่าสูงสุด ($P = f_{s \max}$) แรงเสียดทานสถิตย์ไม่สามารถต้านให้เกิดการเคลื่อนที่ได้ จึงเริ่มเกิดการเคลื่อนที่ (มีการลื่นไถล) แรงเสียดทานที่พื้นก็จะปรับเปลี่ยนเป็นแรงเสียดทานจลน์ นั่นคือ ตั้งแต่จุด ② เป็นต้นไปกล่องจะเริ่มเคลื่อนที่

2) แรงปฏิกิริยา (Normal force)

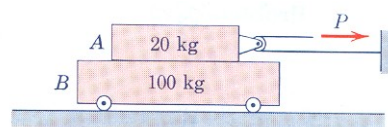
เป็นแรงที่กระทำในแนวตั้งฉากกับผิวสองผิวที่สัมผัสกัน สิ่งที่เราควรทราบเกี่ยวกับแรงปฏิกิริยา คือ ถ้าผิวสองผิวสัมผัสกันจะต้องมีแรงที่ตั้งฉากกับผิวที่สัมผัสกระทำอยู่ แรงนี้จะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับแรงกดที่ทำให้ผิวสองผิวนั้นสัมผัสกัน

3.1.1 การเคลื่อนที่วิธีตรง

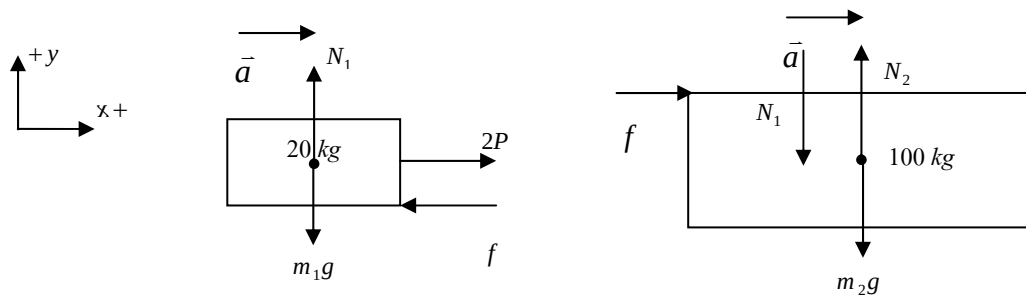
การใช้กฎข้อที่สองของนิวตันในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่วิธีตรงของอนุภาคนั้น มีขั้นตอนในการปฏิบัติดังนี้คือ โดยทั่วไปการเคลื่อนที่วิธีตรงนั้นอนุภาคจะเคลื่อนที่ตามเส้นตรงเส้นหนึ่ง เราจะได้สมการกฎข้อที่สองของนิวตันในสองแนว คือ แนวที่ตั้งฉากกับการเคลื่อนที่และแนวการเคลื่อนที่ ดังนี้ กำหนดให้ทิศ x เป็นทิศที่มีการเคลื่อนที่ ดังนั้น ทิศ y เป็นทิศที่ตั้งฉากกับการเคลื่อนที่

$$\begin{aligned}\therefore \sum \vec{F}_x &= m\vec{a}_x \\ \sum \vec{F}_y &= m\vec{a}_y \\ \text{แต่ } \vec{a}_y &= 0 \\ \therefore \sum \vec{F}_y &= 0\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.1 If the coefficients of static and kinetic friction between the 20 kg block A and the 100 kg cart B are both essentially the same value of 0.5, determine the acceleration of each part for (a) $P = 60 \text{ N}$ and (b) $P = 40 \text{ N}$ [1]



แนวคิด ในการทำการวิเคราะห์ผลของแรงที่มีผลต่อการเคลื่อนที่ สิ่งแรกที่จะต้องทำคือการเขียนแผนผังแรงอิสระ (Free-body diagram) ซึ่งจากประสบการณ์ของผู้เขียน ถ้าคุณเขียน FBD ถูกต้อง ก็มีโอกาสที่จะวิเคราะห์การเคลื่อนที่ได้อย่างถูกต้อง



วิธีทำ (a) เมื่อ $P = 60 \text{ N}$

สมมติให้ A และ B เคลื่อนที่ไปด้วยกัน

พิจารณามวล 20 kg

$$\sum \vec{F}_y = m \vec{a}_y = 0$$

$$N_1 - m_1 g = 0$$

$$N_1 = m_1 g = 20 \times 9.81 = 196.2 \text{ N}$$

$$f_{s \max} = \mu_s N = 0.5 \times 20 \times 9.81 = 98.1 \text{ N}$$

$$\sum \vec{F}_x = m \vec{a}_x$$

$$2P - f = 20a$$

$$f = 2 \times 60 - 20a$$

$$f = 120 - 20a \quad \dots \quad (1)$$

พิจารณาการมอง 100 kg

$$\sum \vec{F}_x = m \vec{a}_x$$

$$f = 100a \quad \dots \quad (2)$$

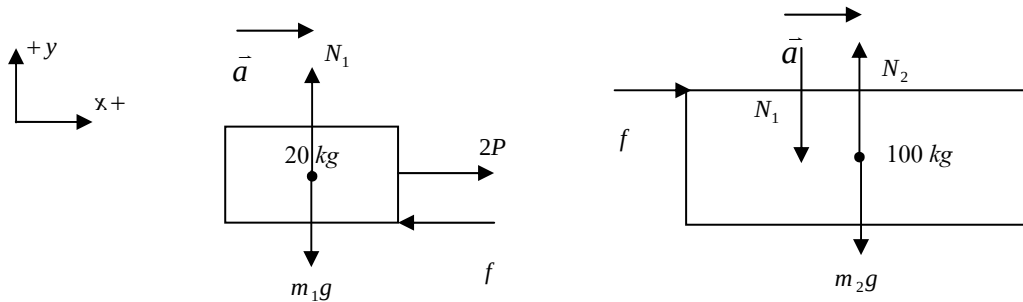
$$\textcircled{1} = \textcircled{2} ; 120 - 20a = 100a$$

$$\therefore a = 1 \text{ m/s}^2$$

แทนค่า a ลงใน สมการที่ (2)

$$f = 100 \text{ N}$$

จะสังเกตว่า f ที่ได้นั้นมีค่ามากกว่า $f_{s \max}$ ดังนั้นจึงเป็นไปได้ แสดงว่าสมมติฐานที่ตั้งไว้ในตอนต้นไม่ถูกต้อง นั่นคืออนุภาคทั้งสองไม่ได้เคลื่อนที่ไปด้วยกัน ดังนั้นจะต้องทำการเริ่มวิเคราะห์ใหม่ โดยสมมติให้อนุภาคไม่ได้เคลื่อนที่ไปด้วยกัน นั่นคือมีการลื่นไถลเกิดขึ้น



$$f_k = \mu_k N = 0.5 \times 20 \times 9.81 = 98.1 \text{ N}$$

พิจารณามวล 20 kg

$$\sum \vec{F}_x = m \vec{a}_x$$

$$20 \times 60 - 98.1 = 20a_1$$

$$a_1 = 1.095 \text{ m/s}^2$$

พิจารณามวล 100 kg

$$\sum \vec{F}_x = m \vec{a}_x$$

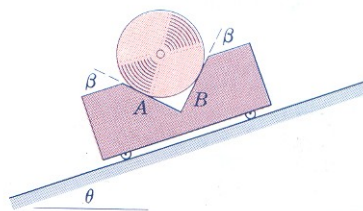
$$98.1 = 100a_2$$

$$a_2 = 0.981 \text{ m/s}^2$$

ตอบ

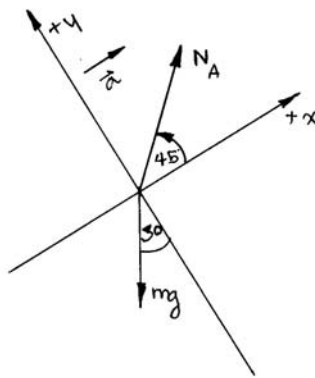
สำหรับในข้อ (b) ให้ลองฝึกนำด้วยตัวเองเพื่อเพิ่มความมั่นใจในการแก้ปัญหา

ตัวอย่างที่ 3.2 A cylinder of mass m rests in a supporting carriage as shown. If $\beta = 45^\circ$ and $\theta = 30^\circ$ calculate the maximum acceleration a that the carriage may be given up the incline so that the cylinder does not lose contact at B . [1]



แนวคิด

สิ่งสำคัญที่จะต้องทราบจากค่าที่ Before lose contact at B คือ ก่อนที่ผิวสองฝั่งจะเคลื่อนที่ออกจากกันแรงกดของผิวทั้งสองจะต้องมีค่าเป็นศูนย์ หรืออีกนัยหนึ่งคือ แรงปฏิกิริยาที่ B เป็นศูนย์

วิธีทำ

$$\sum \vec{F}_y = m \vec{a}_y = 0$$

$$N_A \sin 45 - mg \cos 30 = 0$$

$$N_A = \frac{mg \cos 30}{\sin 45}$$

$$\sum \vec{F}_x = m \vec{a}_x$$

$$N_A \cos 45 - mg \sin 30 = ma$$

$$mg \cos 30 - mg \sin 30 = ma$$

$$a = g (\cos 30 - \sin 30)$$

$$= 0.366 g$$

ตอบ

3.1.2 การเคลื่อนที่วิถีโค้ง

ในการแก้ปัญหากลศาสตร์เคลื่อนที่วิถีโค้งโดยใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน ขึ้นอยู่กับการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยใช้ระบบแกนใด ดังนั้นสมการกฎข้อที่สองของนิวตันสำหรับแต่ละระบบแกน สามารถเขียนได้ดังนี้

- 1) ระบบแกน $x - y$

$$\sum \vec{F}_x = m \vec{a}_x$$

$$\sum \vec{F}_y = m \vec{a}_y$$

- 2) ระบบแกน $n - t$

$$\sum \vec{F}_n = m \vec{a}_n$$

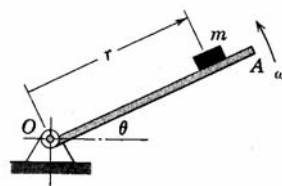
$$\sum \vec{F}_t = m \vec{a}_t$$

- 3) ระบบแกน $r - \theta$

$$\sum \vec{F}_r = m \vec{a}_r$$

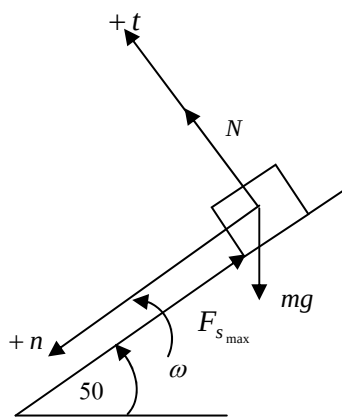
$$\sum \vec{F}_\theta = m \vec{a}_\theta$$

ตัวอย่างที่ 3.3 The member OA rotates about a horizontal axis through O with a constant counterclockwise velocity $\omega = 3 \text{ rad/s}$. As it passes the position $\theta = 0$, a small block of mass m is placed on it at a radial distance $r = 450 \text{ mm}$. If the block is observed to slip at $\theta = 50^\circ$, determine the coefficient of static friction μ_s between the block and the member. [1]



วิธีทำ

แนวคิด การเคลื่อนที่ของกล่องจากมุม $\theta = 0^\circ$ ถึง $\theta = 50^\circ$ กล่องไม่มีการลื่นไถล กล่องจึงมีการเคลื่อนที่เป็นส่วนของวงกลม ณ $\theta = 50^\circ$ กล่องเริ่มมีการลื่นไถล แสดงว่าแรงเสียดทานนั้นเป็นแรงเสียดทานสูงสุด มีค่าเท่ากับ $F_{s \max}$



กำหนด $\omega = 3 \text{ rad/s}$ constant

$$\therefore \alpha = 0 \text{ rad/s}^2$$

$$\sum \vec{F}_t = m \vec{a}_t$$

$$a_t = r\alpha = 0 \text{ m/s}^2$$

$$N - mg \cos \theta = 0$$

$$N = mg \cos \theta \quad \dots$$

①

$$\sum \vec{F}_n = m \vec{a}_n$$

$$mg \sin \theta - F_{s \max} = m \omega^2 r$$

$$F_{s \max} = \mu_s N = mg \sin \theta - m \omega^2 r$$

$$\mu_s = \frac{mg \sin \theta - m \omega^2 r}{mg \cos \theta}$$

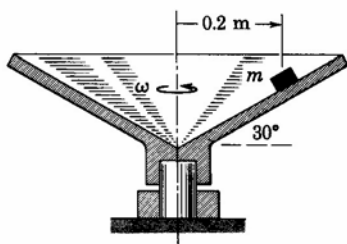
$$= \tan \theta - \frac{\omega^2 r}{g \cos \theta}$$

$$= \tan 50^\circ - \frac{3^2 (0.45)}{9.81 (\cos 50^\circ)}$$

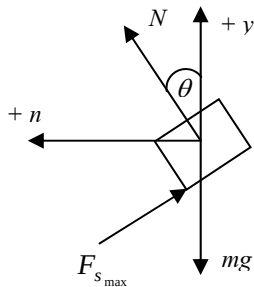
$$= 0.549$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.4 The small object is placed on the inner surface of the conical disk at the radius shown. If the coefficient of static friction between the object and the conical surface is 0.30, for what range of angular velocities ω about the vertical axis will the block remain on the disk without slipping? Assume that the speed changes are made slowly so that any angular acceleration may be neglected. [1]



แนวคิด การหมุนของจาน ถ้าความเร็วรอบของการหมุนต่ำกล่องจะลื่นลง แต่ถ้าหมุนเร็วจนเกินไปกล่องจะถูกเหวี่ยงออกจากจาน ทั้งสองกรณีจะแตกต่างกันตรงทิศของแรงเสียดทาน

วิธีทำa) หา $\omega_{\min}$ 

$$\sum \vec{F}_y = m \vec{a}_y = 0$$

$$N \cos \theta - mg + F_{s \max} \sin \theta = 0$$

$$F_{s \max} = \mu_s N$$

$$\therefore N \cos \theta + \mu_s N \sin \theta - mg = 0$$

$$N = \frac{mg}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} \quad \text{①}$$

$$\sum \vec{F}_n = m \vec{a}_n ; \quad N \cos \theta - F_{s \max} \cos \theta = m \omega^2 r$$

$$\omega^2 = \frac{N \sin \theta - \mu_s N \cos \theta}{mr}$$

$$= \frac{N}{mr} (\sin \theta - \mu_s \cos \theta)$$

$$\omega^2 = \frac{mg}{mr} \frac{(\sin \theta - \mu_s \cos \theta)}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}$$

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{r} \left(\frac{\sin \theta - \mu_s \cos \theta}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{9.81}{0.2} \left(\frac{\sin 30 - 0.3 \cos 30}{\cos 30 + 0.3 \sin 30} \right)} = 3.41 \text{ rad/s} \quad \text{ตอบ}$$

b) หา $\omega_{\max}$

การหา $\omega_{\max}$ ใช้รูปแบบการหาเช่นเดียวกัน เพียงแต่กลับทิศแรงเสียดทาน ดังนั้นขอให้ลองทำเป็นแบบฝึกหัดทบทวน ซึ่งจะได้

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{r} \left(\frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta} \right)} \quad \text{ตอบ}$$

3.2 หลักการของงานและพลังงาน (Work and Energy)

หลักการของงานและพลังงาน เป็นการนำเอากฎข้อที่สองของนิวตันมาประยุกต์ หลักการของงานและพลังงานได้มาจากการอินทิเกรตสมการกฎข้อที่สองของนิวตันเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของอนุภาค จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad \dots \quad (3.2)$$

คูณสมการที่ 3.2 ด้วยผลคูณทางสเกลลาร์ $d\vec{s}$ จะได้

$$\sum \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \vec{a} \cdot d\vec{s} \quad \dots \quad (3.3)$$

จากหลักการของการคูณทางสเกลาร์ของเวกเตอร์ และใช้ระบบแกน $n-t$ โดยให้

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

จะได้

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} \cdot d\vec{s} &= m (\vec{a}_n + \vec{a}_t) \cdot d\vec{s} \\ \sum \vec{F} \cdot d\vec{s} &= m a_t ds \quad \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

อินทิเกรตสมการที่ 3.4 ได้

$$\int \sum \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int m a_t ds \quad \dots \quad (3.5)$$

จากสมการที่ 3.5

$$\begin{aligned} \int \sum \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \text{work done by } \sum \vec{F} \\ \int_{s_1}^{s_2} m a_t ds &= \int_{s_1}^{s_2} m \frac{dv}{dt} \cdot ds \\ &= \int_{v_1}^{v_2} m v dv \\ &= \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_1}^{v_2} \\ \therefore \int_{s_1}^{s_2} \sum \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_1}^{v_2} \quad \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2.1 งาน

งานของแรง $\vec{F}$ ที่กระทำต่ออนุภาค ในช่วงของการเคลื่อนที่ $d\vec{s}$ สามารถหาได้โดย

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

ซึ่ง U = งานของแรง $\vec{F}$ ที่กระทำต่ออนุภาคในช่วงการเคลื่อนที่ $d\vec{s}$

3.2.2 พลังงานจลน์ (Kinetic energy)

พลังงานจลน์ ใช้สัญลักษณ์ T ถูกกำหนดด้วยความสัมพันธ์ ดังนี้

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

จะสังเกตว่า พลังงานจลน์ของอนุภาคเป็นพลังงานที่สะสมอยู่ในรูปของความเร็ว

3.2.3 พลังงานศักย์ (Potential Energy)

พลังงานศักย์ สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ

1) พลังงานศักย์โน้มถ่วง (Gravitational potential Energy)

พลังงานศักย์โน้มถ่วงเป็นงานของแรงโน้มถ่วง (น้ำหนัก) ต่ออนุภาค ในช่วงของการเคลื่อนที่ พลังงานศักย์โน้มถ่วงเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ V_g โดยสามารถหาได้จากสมการ

$$V_g = mgh \quad \dots \quad (3.7)$$

โดยที่ h คือระยะในแนวดิ่งที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปในช่วงของการเคลื่อนที่

2) พลังงานศักย์ยืดหยุ่น (Elastic potential Energy) (V_e)

พลังงานศักย์ยืดหยุ่นเป็นงานของแรงของสปริงที่กระทำต่ออนุภาคสำหรับกรณีการเคลื่อนที่ของสปริงใน 1 มิติ และกำหนดให้สปริงนั้นมีความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่ใช้ดึงกับระยะยืดตัวเป็นแบบเส้นตรง จะได้

$$F_s = kx \quad \dots \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad F_s &= \text{แรงในสปริง} \\ k &= \text{ค่าคงที่ของสปริง} \\ x &= \text{ระยะยืดตัวหรือหดตัวของสปริง} \\ \therefore V_e &= \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad \dots \quad (3.9) \end{aligned}$$

3.2.4 สมการงานและพลังงาน

จากสมการที่ 3.6 เพื่อความสะดวกและง่ายต่อการวิเคราะห์จึงทำการปรับเพิ่มพลังงานศักย์โน้มถ่วงและพลังงานศักย์ในสปริงเข้าไปในสมการ โดยสามารถแสดงสมการงานและพลังงานของอนุภาคใด ๆ ได้ดังนี้

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \quad \dots \quad (3.10)$$

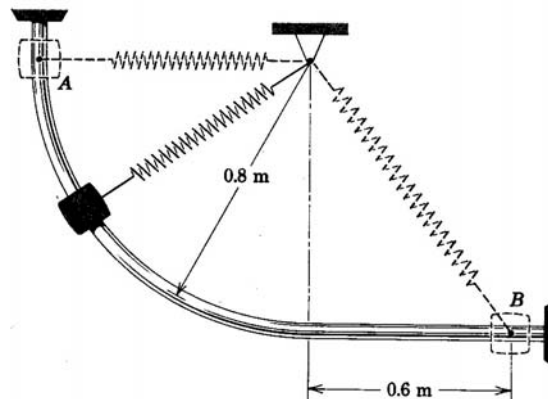
เมื่อ U = งานของแรงทุกชนิดที่กระทำต่ออนุภาคยกเว้นน้ำหนักของอนุภาคและแรงในสปริงที่กระทำต่ออนุภาค

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \text{การเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของอนุภาค}$$

$$\Delta V_g = V_{g_2} - V_{g_1} = \text{การเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์โน้มถ่วงของอนุภาค}$$

$$\Delta V_e = V_{e_2} - V_{e_1} = \text{การเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ยืดหยุ่นของอนุภาค}$$

ตัวอย่างที่ 3.5 The spring has an unstretched length of 0.4 m and a stiffness of 200 N/m . The 3-kg slider and attached spring are released from rest at A and move in the vertical plane. Calculate the velocity v of the slider as it reaches B in the absence of Friction. [1]



วิธีทำ แผนผังแสดงอิสระที่กระทำต่ออนุภาค
จากสมการที่ 3.10 เราจะได้

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \quad \dots \quad (3.11)$$

จากตำแหน่งที่ $A \rightarrow B$

$U =$ งานของแรงทุกแรงที่ไม่ใช่แรงในสปริงและน้ำหนักของอนุภาค

$\therefore$ ในที่นี้จะคิดเฉพาะงานของแรง N แต่แรง N ไม่ทำให้เกิดงานเนื่องจากมีทิศตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ตลอดเวลา

$$\therefore U = 0 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_B - T_A \\ &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}v_B^2 \\ &= 1.5v_B^2 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\Delta V_g = V_{g_B} - V_{g_A}$$

กำหนดให้ $h_B = 0 \text{ m}$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta V_g &= mg(h_B - h_A) \\ &= 3(9.81)(0 - 0.8) = -23.544 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\Delta V_e = V_{e_B} - V_{e_A}$$

ความยาวอิสระของสปริงเท่ากับ 0.4 m

$$\begin{aligned}
 \therefore x_A &= 0.8 - 0.4 = 0.4 \text{ m} \\
 x_B &= 1.0 - 0.4 = 0.6 \text{ m} \\
 \therefore \Delta V_e &= \frac{1}{2}(200)(0.6^2 - 0.4^2) \\
 &= 20 \text{ J}
 \end{aligned}$$

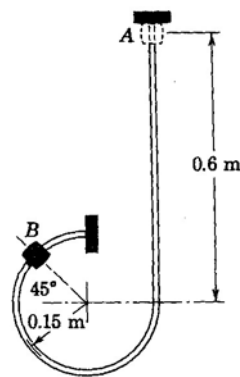
แทนค่าทั้งหมดในสมการที่ 3.11 จะได้

$$\begin{aligned}
 0 &= 1.5v_B^2 - 23.544 + 20 \\
 1.5v_B^2 &= 3.544 \\
 v_B &= 1.537 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.6 A bead with a mass of 0.25 kg is released from rest at A and slides down around the fixed smooth wire. Determine the force N between the wire and the bead as it pass point B.

[1]



วิธีทำ แผนผังแรงอิสระ

มีแรงที่กระทำต่ออนุภาคอยู่ 2 แรง คือ แรง N และ mg เราไม่
คิดงานของแรง mg และแรง N ไม่เคยทำให้เกิดงาน

$$\therefore U = 0 \text{ J}$$

$$\text{จาก } U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$= \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (v_1 = 0 \text{ m/s})$$

$$\Delta V_g = V_{g2} - V_{g1} = mg(h_2 - h_1)$$

$$\text{กำหนดให้ } h_1 = 0 \text{ m}$$

$$\therefore h_2 = -0.6 + 0.15 \sin 45^\circ$$

$$= -0.4939 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}\therefore \Delta V_g &= 0.25 \times 9.81 \times (-0.4939 - 0) \\ &= -1.2113 \text{ J}\end{aligned}$$

$$\Delta V_e = 0 \text{ J}$$

แทนค่าทั้งหมดลงในสมการ จะได้

$$0 = \frac{1}{2}(0.25)v_2^2 - 1.2113 + 0 = 0$$

$$\therefore v_2^2 = 9.6903$$

$$v_2 = 3.113 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 3.113 \text{ m/s}$$

จากรูป

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_n &= m \vec{a}_n \\ mg \cos 45 + N &= m \frac{v^2}{0.15} \\ N &= 0.25 \left(\frac{9.6903}{0.15} - 9.81 \cos 45 \right) \\ &= 14.42 \text{ N}\end{aligned}$$

ตอบ

3.3 การดลและโมเมนตัม

ในสองหัวข้อที่ผ่านมา ได้กล่าวถึงการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยใช้กฎข้อที่สองของนิวตันและหลักการของงานและพลังงาน ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยใช้หลักการดลและโมเมนตัม ซึ่งพอสรุปโดยสังเขปได้ดังนี้

3.3.1 การดลเชิงเส้นและโมเมนตัมเชิงเส้น (Linear Impulse and Linear momentum)

โมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาคเป็นปริมาณเวกเตอร์ เป็นผลคูณของความเร็วซึ่งเป็นเวกเตอร์กับมวลของอนุภาคซึ่งเป็นสเกลาร์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{G}$ โดย

$$\vec{G} = m\vec{v} \quad \dots \quad (3.12)$$

หลักการดลและโมเมนตัมเป็นผลจากการพิจารณากฎข้อที่สองของนิวตันเทียบกับเวลา จากสมการกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \sum \vec{F} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \sum \vec{F}dt &= d(m\vec{v})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} dt &= d\vec{G} \\ \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} dt &= \int_{\vec{G}_1}^{\vec{G}_2} d\vec{G} \quad \dots\end{aligned}\quad (3.13)$$

หรือ

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} dt = \vec{G}_2 - \vec{G}_1 \quad \dots \quad (3.14)$$

จากสมการที่ 3.13 และ 3.14 เทอมด้านซ้ายมือของสมการเราเรียกว่า การคลเซ็งเส้นของแรง $\sum \vec{F}$ ซึ่งอาจจะกล่าวอีกนัยหนึ่งได้คือ การคลเซ็งเส้นของแรง $\sum \vec{F}$ จะเท่ากับผลการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเซ็งเส้น

3.3.2 หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม

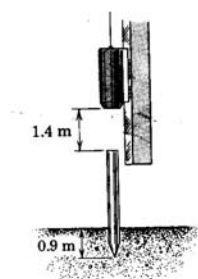
พิจารณาสมการที่ 3.14 เทอมทางด้านซ้ายมือของสมการ

$$\text{Impulse} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} dt \quad \dots \quad (3.15)$$

หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมหรือโมเมนตัมมีค่าคงที่ หรือโมเมนตัมเปลี่ยนแปลงเท่ากับศูนย์ จะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อการคลเซ็งเส้นมีค่าเท่ากับศูนย์ จากสมการที่ 3.15 การคลจะมีค่าเท่ากับศูนย์ใน 2 กรณี ดังนี้

- 1) $\sum \vec{F} = 0$; นั่นคือ ไม่มีแรงใด ๆ มากระทำ ดังนั้นการคลจะมีค่าเท่ากับศูนย์
- 2) $\sum \vec{F} \neq 0$ และ $\sum \vec{F} \neq \infty$ แต่ Δt มีค่าน้อยมากหรือลู่เข้าสู่ศูนย์ ก็จะเป็นผลให้การคลมีค่าเป็นศูนย์ได้เช่นกัน

ตัวอย่างที่ 3.7 The 450 kg ram of a pile driver falls 1.4 m from rest and strikes the top a 240 kg pile embedded 0.9 m in the ground. Upon impact the ram is seen to move with the pile with no noticeable rebound. Determine the velocity v of the pile and ram immediately after impact. Can you justify using the principle of conservation of momentum even though the weight act during the impact. [1]



วิธีทำ แนวคิด โจทย์ต้องการทราบความเร็วของก้อนตอกเสาเข็มและเสาเข็มทันทีทันใดหลังการกระแทก เมื่อพิจารณาแรงที่กระทำต่อเสาเข็มและก้อนในแนวดิ่ง ถึงแม้ว่าจะมีแรงเสียดทานของพื้นดินและน้ำหนักของเสาเข็มมากระทำ แต่แรงเหล่านั้นไม่ได้มีค่าเป็นอนันต์ เวลาที่เกิดขึ้นในการกระแทกนั้นสั้นมาก เราจึงสามารถใช้กฎอนุรักษ์โมเมนตัมได้

หาความเร็วของก้อนก่อนจะเข้ากระทบ โดยใช้หลักงานและพลังงาน

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

พิจารณาเฉพาะหัวก้อน

$$U = 0 \text{ J}$$

$$\Delta T = T_1 - T_0 = T_1 = \frac{1}{2}(m)v_1^2$$

$$\Delta V_g = V_{g_1} - V_{g_0} = -mg \text{ (1.4)}$$

$$\Delta V_e = 0 \text{ J}$$

$$0 = \frac{1}{2}mv_1^2 - mg \text{ (1.4)} + 0$$

$$v_1 = \sqrt{2g(1.4)} = 5.241 \text{ m/s}$$

จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม พิจารณาหัวก้อนและเสาเข็ม

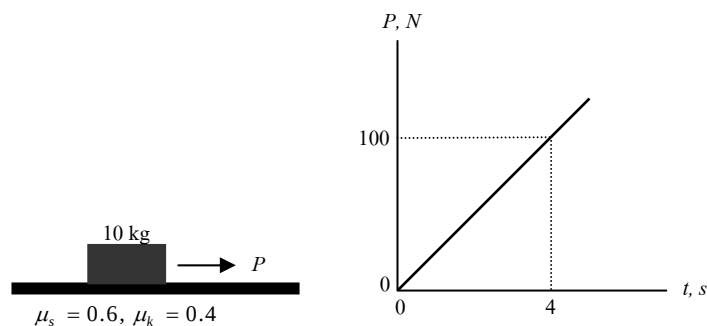
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}'$$

$$450(5.241) + 240(0) = (450 + 240)v'$$

$$v' = 3.418 \text{ m/s}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.8 The force P , which is applied to the 10 kg block initially at rest, varies linearly with the time as indicated. If the coefficients of static and kinetic friction between the block and the horizontal surface are 0.6 and 0.4, respectively, determine the velocity of the block when $t = 4 \text{ s}$. [1]



วิธีทำ เนื่องจากอนุภาคเริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่ง จึงจะต้องทำการหาเวลาที่อนุภาคเริ่มการเคลื่อนที่ ซึ่งก็คือเวลาที่แรง P สามารถเอาชนะแรงเสียดทานสถิตย์ที่พื้นได้

จากกราฟ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง P และ t ดังนี้

$$P = 25t$$

หาขนาดของแรงเสียดทานสถิตย์และแรงเสียดทานจลน์
ไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง

$$\therefore \sum \bar{F}_y = m\bar{a}_y = 0$$

$$N = mg$$

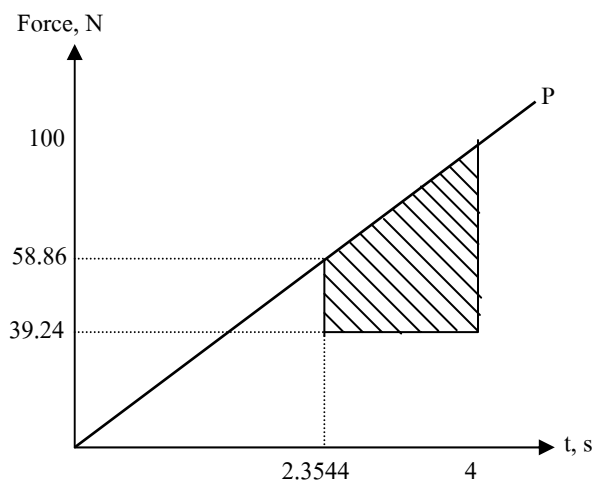
$$f = \mu N$$

$$\therefore f_{s_{\max}} = \mu_s N = 0.6 \times 10 \times 9.81 = 58.86 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k N = 0.4 \times 10 \times 9.81 = 39.24 \text{ N}$$

$\therefore$ อนุภาคเริ่มมีการเคลื่อนที่เมื่อ P มากกว่า $f_{s_{\max}}$

$$\therefore t = 2.3544 \text{ s.}$$



จากหลักการดลและโมเมนตัม

$$\int_0^t \sum \bar{F}_x dt = \bar{G}_{2x} - \bar{G}_{1x}$$

$$\int_0^t (P - f) dt = \bar{G}_{2x}$$

$$\therefore \bar{G}_{2x} = m\bar{v}_{2x} = \int_0^t (P - f) dt$$

$$= \text{พ.ท.ใต้กราฟที่แรงเอาไว้}$$

$$= \frac{1}{2} \times (4 - 2.3544) \times ((58.86 - 39.24) + (100 - 39.24))$$

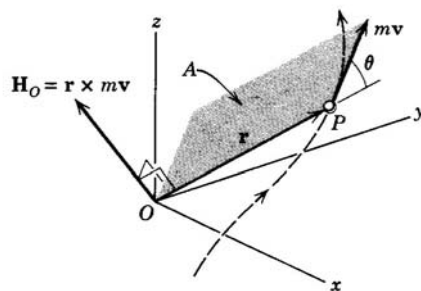
$$10v = 66.137$$

$$\therefore v = 6.6137 \text{ m/s}$$

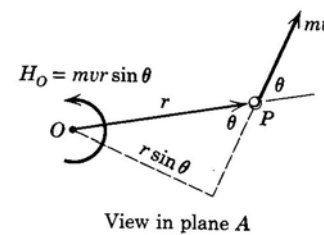
ตอบ

3.3.3 การดลเชิงมุมและโมเมนตัมเชิงมุม

โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาครอบจุด O ($\vec{H}_O$) หมายถึง โมเมนต์ของโมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาครอบจุด O ดังแสดงในรูป หลักการดลเชิงมุมและโมเมนตัมเชิงมุม สามารถสรุปได้ดังนี้



รูปที่ 3.2 [1]

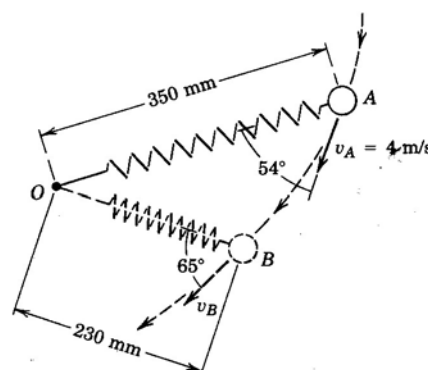


รูปที่ 3.3 [1]

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_0 dt = \Delta \vec{H}_0 = \vec{H}_{0_2} - \vec{H}_{0_1} \quad \dots \quad (3.16)$$

เมื่อ $\vec{H}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$

ตัวอย่างที่ 3.9 A particle mass m moves with negligible friction on a horizontal surface and is connected to a light spring fastened at O. At position A the particle has the velocity $\vec{v}_B$ of the particle as it passes position B. [1]



วิธีทำ จาก

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_0 dt = \Delta \vec{H}_0 = \vec{H}_{0_2} - \vec{H}_{0_1}$$

จะสังเกตว่าไม่มีแรงใดทำให้เกิดโมเมนตัมรอบจุด O เลย ตลอดการเคลื่อนที่ของอนุภาคจาก A ไปยัง B เพราะแรงในสปริงพุ่งผ่านจุด O ตลอดการเคลื่อนที่ ดังนั้น

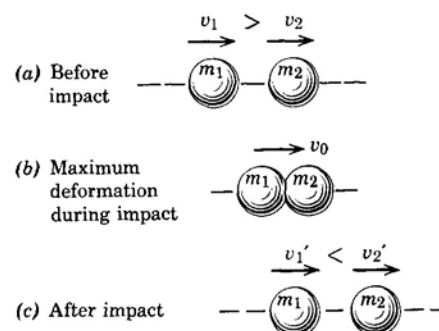
$$\begin{aligned}\vec{H}_{0_2} &= \vec{H}_{0_1} \\ v_B \sin 65(0.23) &= v_A \sin 54(0.35) \\ v_B &= \frac{0.35(4) \sin 54}{0.23 \sin 65} \\ &= 5.4335 \text{ m/s}\end{aligned}$$

ตอบ

3.4 การชน (Impact)

3.4.1 การชนแนวตรง (Direct central impact)

การชนแนวตรงเป็นการชนกันของอนุภาค 2 อนุภาคที่มีมวล m_1 และ m_2 เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_1 และ v_2 ดังรูป ในการกระทบกันระหว่างอนุภาคทั้งสอง สามารถแบ่งช่วงของการชนออกเป็นสองช่วงด้วยกัน คือ ช่วงการยุบตัวและช่วงการคืนตัว



รูปที่ 3.4 [1]

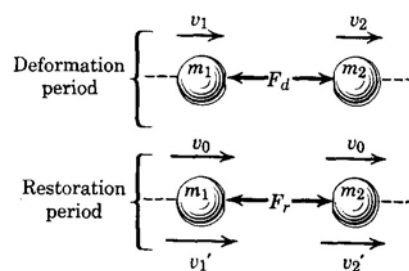
ช่วงของการยุบตัวของอนุภาคทั้งสองบริเวณการชนจะเกิดการยุบตัวเพื่อดูดซับพลังงานที่เกิดจากการชน จนถึงจุดที่มีการยุบตัวมากที่สุด ณ จุดนี้ ความเร็วของอนุภาคทั้งสองจะมีค่าเท่ากัน หลังจากนั้นจะเป็นช่วงของการคืนตัว เป็นช่วงที่อนุภาคทั้งสองปลดปล่อยพลังงานที่ดูดซับไปออกมา ทำให้อนุภาคทั้งสองเคลื่อนที่ออกจากกัน

ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ จะพิจารณาในแนวที่อนุภาคทั้งสองเคลื่อนที่เข้าชนกัน จะสังเกตว่าไม่มีแรงใดที่เป็นอนันต์มากระทำต่ออนุภาคทั้งสอง ดังนั้นจึงสามารถใช้กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวทางการกระทบของอนุภาคทั้งสองได้ ดังนี้

$$\Delta \bar{G} = 0$$

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = m_1 \bar{v}_1' + m_2 \bar{v}_2' \quad \dots \quad (3.17)$$

จากสมการที่ 3.17 มีตัวแปรอยู่สองตัว ดังนั้นต้องการสมการอีกหนึ่งสมการเพื่อสามารถแก้ปัญหาเพื่อหาความเร็วหลังการชนได้ สมการนั้นคือ สมการสัมประสิทธิ์การคืนตัวของอนุภาคทั้งสอง โดยสัมประสิทธิ์การคืนตัวของอนุภาคทั้งสองหลังการชน หมายถึง สัดส่วนระหว่างการลดลงในช่วงของการคืนตัว ต่อการลดลงในช่วงของการยุบตัว



รูปที่ 3.5 [1]

พิจารณามวล m_1

$$e = \frac{\int_{t_0}^t F_r dt}{\int_0^{t_0} F_d dt} = \frac{m_1(-v_1' - (-v_0))}{m_1(-v_0 - (-v_1))} = \frac{v_0 - v_1'}{v_1 - v_0}$$

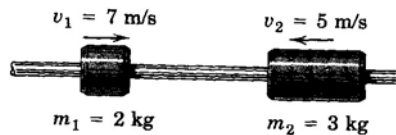
พิจารณามวล m_2

$$e = \frac{\int_{t_0}^t F_r dt}{\int_0^{t_0} F_d dt} = \frac{m_2(v_2' - v_0)}{m_2(v_0 - v_2)} = \frac{v_2' - v_0}{v_0 - v_2}$$

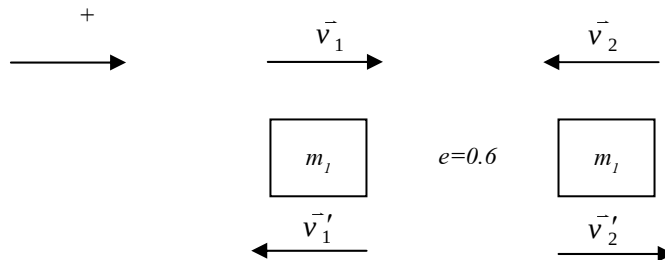
จากสมการสองสมการข้างต้น จะได้

$$e = \frac{\bar{v}_2' - \bar{v}_1'}{\bar{v}_1 - \bar{v}_2} \quad \dots \quad (3.18)$$

ตัวอย่างที่ 3.10 Compute the final velocities $\bar{v}_1'$ and $\bar{v}_2'$ after collision of the two cylinders that slide on the smooth horizontal shaft. The coefficient of restitution is $e = 0.6$.



Solⁿ กำหนดให้ก่อนกระทบและหลังกระทบอนุภาคทั้งสองมีความเร็วดังแสดงในรูป



$$\Delta G_x = 0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

$$2(7) + 3(-5) = -2v_1' + 3v_2'$$

$$2v_1' - 3v_2' = 1 \quad \dots \quad (2)$$

$$e = \frac{\vec{v}_2' - \vec{v}_1'}{\vec{v}_1 - \vec{v}_2} = \frac{v_2' - (-v_1')}{7 - (-5)} = 0.6$$

$$v_2' + v_1' = 7.2 \quad \dots \quad (2)$$

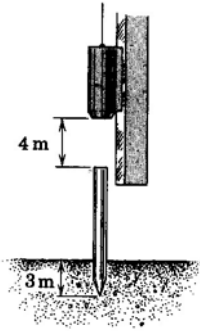
จากสมการที่ (1) และ (2) จะได้

$$v_1' = 4.52 \text{ m/s} \quad \text{ไปทางซ้าย}$$

$$v_2' = 2.68 \text{ m/s} \quad \text{ไปทางขวา}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.11 In the selection of the ram of the pile driver it is desired that the ram lose all of its kinetic energy at each blow. Hence, the velocity of the ram is zero immediately after impact. The mass of each pile to be driven is 300 kg, and experience has shown that a coefficient of restitution of 0.3 can be expected. What should be the mass m of the ram? Compute the velocity v of the pile immediately after impact if the ram is dropped from height of 4 m onto the pile. Also compute the energy losses ΔE due to impact at each blow. [1]



วิธีทำ หาคความเร็วของหัวก้อนก่อนชน

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_c$$

$$U = 0 \text{ J}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Delta V_g = -mg(4)$$

$$\Delta V_e = 0 \text{ J}$$

$$\therefore v^2 = 2 \times g \times 4$$

$$v = 8.859 \text{ m/s}$$

$$m_1 = ?$$

$$v_1 = 8.859 \text{ m/s}$$

$$v'_1 = 0 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 0 \text{ m/s}$$

$$v'_2 = ?$$

$$m_2 = 300 \text{ kg}$$

$$\Delta \vec{G}_y = 0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

$$m_1(8.859) = m_2 v'_2 = 300 v'_2$$

$$m_1 = 33.864 v'_2 \quad \dots \quad (1)$$

$$e = \frac{\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1}{\vec{v}_1 - \vec{v}_2} = 0.3$$

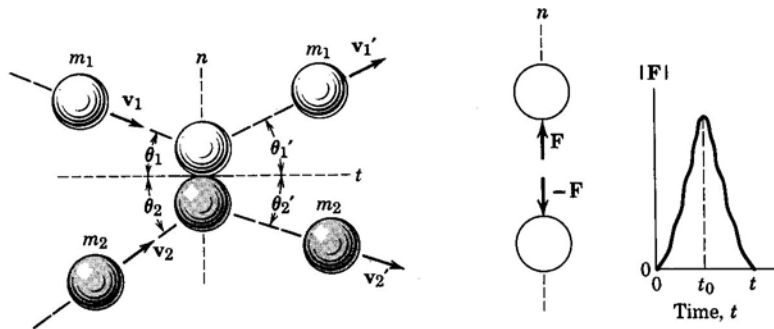
$$v'_2 = 0.3(8.859) = 2.6577 \text{ m/s}$$

$$\therefore m_1 = 90 \text{ kg}$$

ตอบ

3.4.2 การชนแนวเฉียง (Oblique central impact)

สำหรับการชนกันของอนุภาค 2 อนุภาค ที่ความเร็วของอนุภาคตัวใดตัวหนึ่งหรือทั้งสองตัว ไม่ได้อยู่ในแนวการชน ดังรูป จะเห็นว่า มีตัวแปรที่เกิดขึ้นถึง 4 ตัวแปร ดังนั้นจะต้องหาสมการถึง 4 สมการเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งสมการทั้ง 4 สมการ สามารถสรุปได้ ดังนี้



รูปที่ 3.6 [1]

1) สมการในแนวการชน

1.1 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวการชน เนื่องจากไม่มีแรงที่เป็นอนันต์มากระทำต่ออนุภาคทั้งสอง ดังนั้นจะได้ว่าโมเมนตัมในแนวการชนของอนุภาคทั้งสองคงที่ นั่นคือ

$$\Delta \vec{G}_n = 0 \quad \dots \quad (3.18)$$

$$\text{หรือ} \quad m_1 \vec{v}_{1n} + m_2 \vec{v}_{2n} = m_1 \vec{v}'_{1n} + m_2 \vec{v}'_{2n}$$

1.2 สัมประสิทธิ์การคืนตัว

$$e = \frac{\vec{v}'_{2n} - \vec{v}'_{1n}}{\vec{v}_{1n} - \vec{v}_{2n}} \quad \dots \quad (3.19)$$

2) สมการในแนวตั้งฉากกับแนวการชน

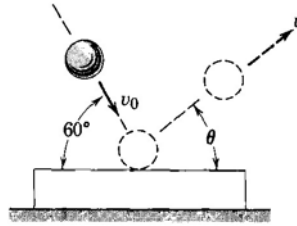
เมื่อพิจารณาแต่ละอนุภาค จะสังเกตเห็นว่า แรงที่เกิดจากการชนกระทำในแนวการชนเท่านั้น จึงสามารถสรุปได้ว่าโมเมนตัมเชิงเส้นในแนวตั้งฉากกับแนวการชนคงที่ สำหรับแต่ละอนุภาค นั่นคือ

$$\Delta \vec{G}_t = 0 \quad (\text{แต่ละมวล})$$

$$m_1 \vec{v}_{1t} = m_1 \vec{v}'_{1t} \quad \dots \quad (3.20)$$

$$m_2 \vec{v}_{2t} = m_2 \vec{v}'_{2t} \quad \dots \quad (3.21)$$

ตัวอย่างที่ 3.12 The steel ball strikes the heavy steel plate with a velocity $\vec{v}_0 = 24 \text{ m/s}$ at the angle of 60° with the horizontal. If the coefficient of restitution is $e=0.8$, compute the velocity $\vec{v}$ and its direction θ with which the ball rebounds from the plate.

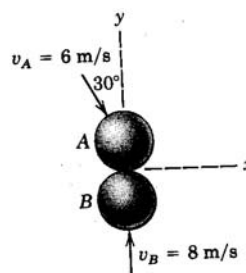


วิธีทำ การชนระหว่างลูกเหล็กมวล m กับแผ่นเหล็กซึ่งมีมวลมาก จะถือว่ามวลของแผ่นเหล็กมีขนาดใหญ่มาาก ๆ เมื่อเทียบกับลูกเหล็ก (เป็นอนันต์) ดังนั้นจะถือว่าความเร็วของแผ่นเหล็กก่อนชนและหลังชนมีค่าเท่ากับศูนย์ สมการที่จะใช้ได้เหลือ 2 สมการ คือ สัมประสิทธิ์การคืนตัว และกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวตั้งฉากกับแนวการชนของลูกเหล็ก

$$\begin{aligned}
 \text{กำหนด} \quad \bar{v}_{1n} &= -v_1 \sin 60 = -20.745 \text{ m/s} \\
 \bar{v}_{1t} &= 24 \cos 60 = 12 \text{ m/s} \\
 e &= \frac{\bar{v}'_{2n} - \bar{v}'_{1n}}{\bar{v}_{1n} - \bar{v}_{2n}} = \frac{-\bar{v}'_{1n}}{-20.745} = 0.8 \\
 \therefore \quad \bar{v}'_{1n} &= 16.628 \text{ m/s} \\
 \bar{v}'_{1t} &= \bar{v}_{1t} = 12 \text{ m/s} \\
 \therefore \quad \bar{v}'_{1t} &= \sqrt{16.628^2 + 12^2} = 20.506 \text{ m/s} \\
 \theta'_1 &= \tan^{-1} \frac{\bar{v}'_{1n}}{\bar{v}'_{1t}} = 54.18
 \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.13 The two identical steel balls moving with initial velocities $\bar{v}_A$ and $\bar{v}_B$ collide as shown. If the coefficient of restitution is $e = 0.7$, determine the velocity of each ball just after impact and the percentage loss n of the system kinetic energy. [1]



วิธีทำ

กำหนด

$$\begin{aligned}
 e &= 0.7 \\
 \bar{v}_{An} &= -6 \cos 30 = -5.196 \text{ m/s} \\
 \bar{v}_{At} &= 3 \text{ m/s} \\
 \bar{v}_{Bn} &= 8 \text{ m/s} \\
 \bar{v}_{Bt} &= 0 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

$$\Delta \vec{G}_n = 0 \quad (\text{มวลทั้งสอง})$$

$$m_A \vec{v}_{An} + m_B \vec{v}_{Bn} = m_A \vec{v}'_{An} + m_B \vec{v}'_{Bn}$$

$$m_A = m_B ;$$

$$-5.196 + 8 = v'_{An} - v'_{Bn}$$

$$v'_{An} - v'_{Bn} = 2.804 \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$e = \frac{\vec{v}'_{Bn} - \vec{v}'_{An}}{\vec{v}_{An} - \vec{v}_{Bn}}$$

$$0.7 = \frac{-v'_{Bn} - v'_{An}}{-5.196 - 8}$$

$$v'_{Bn} + v'_{An} = 9.237 \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

จาก ① และ ② จะได้

$$v'_{An} = 6.021 \text{ m/s}$$

$$v'_{Bn} = 3.217 \text{ m/s}$$

แนวแกน t

$$\vec{v}'_{At} = \vec{v}_{At} = 3 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}'_{Bt} = \vec{v}_{Bt} = 0 \text{ m/s}$$

$$\therefore |\vec{v}_A| = \sqrt{6.021^2 + 3^2} = 6.727 \text{ m/s}$$

$$|\vec{v}_B| = 3.217 \text{ m/s}$$

$$n = \frac{E - E'}{E} = \frac{(8^2 + 6^2) - (6.727^2 + 3.217^2)}{8^2 + 6^2} \times 100$$

$$= 44.41\%$$

ตอบ