

## บทที่ 5

# โมเมนตัมเชิงเส้นและการชน

### 5.1 โมเมนตัมเชิงเส้น

นิยามของโมเมนตัมเชิงเส้น (linear momentum,  $\vec{p}$ ) ของวัตถุมวล  $m$  เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว  $\vec{v}$  มีค่าเป็นดังนี้

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (5.1)$$

โมเมนตัมเชิงเส้นเป็นปริมาณเวกเตอร์ซึ่งมีองค์ประกอบตามแนวแกน  $x, y$  และ  $z$  ดังนี้คือ

$$p_x = mv_x \quad p_y = mv_y \quad p_z = mv_z \quad (5.2)$$

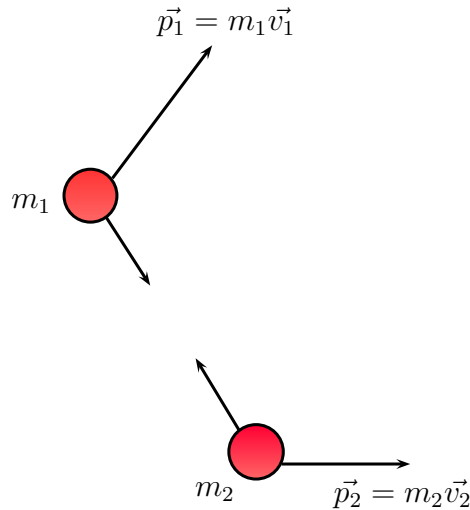
เมื่อวัตถุเคลื่อนที่โดยมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วทำให้โมเมนตัมของวัตถุเปลี่ยนแปลงซึ่งเป็นผลมาจากการที่วัตถุมีแรงลัพธ์ที่ไม่เป็นศูนย์มากระทำต่อวัตถุ (กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน) นั่นคือ

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (5.3)$$

จากสมการที่ 5.3 จะเห็นว่า แรงมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงเส้น

### 5.2 การคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้น

พิจารณาการชนของระบบ 2 อนุภาคดังรูปที่ 5.1 เมื่อระบบไม่มีแรงภายนอกมากระทำในระหว่างการเคลื่อนที่วัตถุมวล  $m_1$  และมวล  $m_2$  ต่างออกแรงดึงดูดต่อกันดังนั้นทำให้ได้แรงที่วัตถุมวล  $m_2$  กระทำต่อวัตถุมวล  $m_1$  คือ  $\vec{F}_{21}$  ในทำนองเดียวกันแรงที่มวล  $m_1$  กระทำต่อมวล  $m_2$  คือ  $\vec{F}_{12}$  นั่นคือจะได้ว่า



รูปที่ 5.1: การชนกันของระบบสองอนุภาค

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \text{ และ } \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 3 ของนิวตันแรงสองแรงนี้เป็นแรงคู่กิริยา นั่นคือ

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -\vec{F}_{21} \\ \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} &= 0 \\ \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

เมื่อ  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  คือ โมเมนตัมเชิงเส้นรวมของระบบ และจากสมการ 5.4 แสดงให้เห็นว่า ผลรวมของโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบมีค่าคงที่ถ้าไม่มีแรงลัพธ์ภายนอกมากระทำต่อระบบ นี่คือการคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้น (conservation of linear momentum) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \quad (5.5)$$

เมื่อ  $\vec{p}_{1i}$  และ  $\vec{p}_{2i}$  คือ โมเมนตัมเชิงเส้นตอนเริ่มต้นของวัตถุทั้งสอง และ  $\vec{p}_{1f}$  และ  $\vec{p}_{2f}$  คือ โมเมนตัมเชิงเส้นตอนสุดท้าย สำหรับในกรณีทั่วไปเราสามารถเขียนสรุปหลักการคงตัวของโมเมนตัมของระบบที่ประกอบด้วยหลาย อนุภาคได้โดยแยกตามองค์ประกอบในแต่ละแกน ดังนี้คือ

$$\sum_{\text{system}} p_{ix} = \sum_{\text{system}} p_{fx}} \quad \sum_{\text{system}} p_{iy} = \sum_{\text{system}} p_{fy} \quad \sum_{\text{system}} p_{iz} = \sum_{\text{system}} p_{fz} \quad (5.6)$$

## 5.3 การดลและโมเมนตัม

พิจารณาแรงหนึ่งแรงกระทำต่ออนุภาคในช่วงเวลาหนึ่งและแรงดังกล่าวอาจจะมีค่าเปลี่ยนแปลงตามเวลาจากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  หรือ  $d\vec{p} = \vec{F}dt$  เมื่อทำการอินทิเกรตสมการดังกล่าวเราจะทราบการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมตลอดช่วงเวลาที่ถูกรับแรงกระทำเรียกปริมาณนี้ว่า การดล (Impulse) ซึ่งก็คือ การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt \quad (5.7)$$

จากสมการ 5.7 เนื่องจากแรงไม่คงที่ ดังนั้นเพื่อความสะดวกจึงนิยามแรงเฉลี่ยมีค่าเป็น

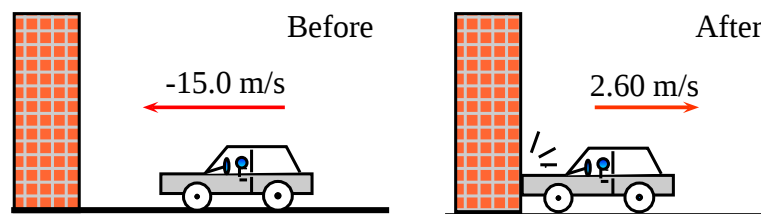
$$\bar{\vec{F}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt \quad (5.8)$$

ทำให้ได้ขนาดของการดลในเทอมของแรงเฉลี่ยเป็นดังนี้

$$I = \bar{F}\Delta t \quad (5.9)$$

ในสถานการณ์ทางกายภาพหลาย ๆ อย่างเราจะใช้การประมาณการดลที่ซึ่งสมมติว่าแรงที่กระทำต่อวัตถุนั้นกระทำในช่วงเวลาสั้น ๆ แต่ขนาดมากกว่าแรงอื่นที่มีอยู่ขณะนั้นมาก

**ตัวอย่างที่ 1** ในการทดสอบการชนของรถยนต์คันหนึ่ง รถยนต์มีมวล 1500 kg พุ่งชนกำแพงด้วยความเร็วต้น 15 m/s หลังจากชนรถยนต์กระเด็นออกมาด้วยความปลาย 2.6 m/s ดังรูป 5.2 ถ้าช่วงเวลาของการชนครั้งนี้คือ 0.15 วินาทีจงหาขนาดของการดลและแรงดลนี้



รูปที่ 5.2: การทดสอบการชนของรถยนต์คันหนึ่ง

**วิธีทำ** จากนิยามการดลของวัตถุในช่วงเวลาหนึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} I &= \Delta p = p_f - p_i = mv_f - mv_i \\ &= m(v_f - v_i) = 1500(2.6 - (-15)) = 2.64 \times 10^4 \text{ kg.m/s} \end{aligned}$$

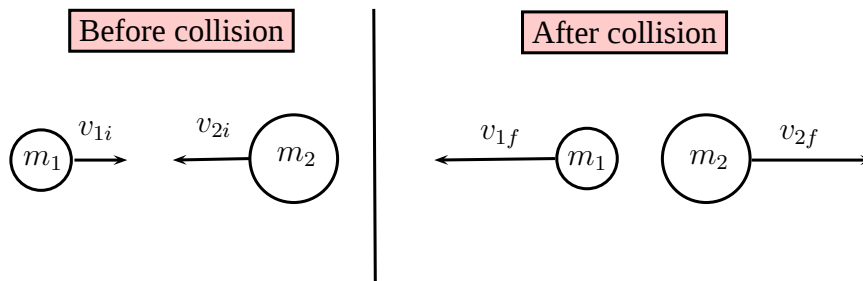
และแรงดลมีค่าเท่ากับ

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4}{0.15} = 1.76 \times 10^5 \text{ N}$$

ตอบ ขนาดการดลและแรงดลมีค่าเท่ากับ  $2.64 \times 10^4 \text{ kg.m/s}$  และ  $1.76 \times 10^5 \text{ N}$  ตามลำดับ

## 5.4 การชนแบบยืดหยุ่น

การชนแบบยืดหยุ่น (Elastic collision) ของวัตถุสองวัตถุใด ๆ ก็คือ การชนกันที่ทำให้พลังงานจลน์ และโมเมนตัมรวมของระบบก่อนและหลังการชนกันมีค่าเท่ากัน จากรูป 5.3 สมมติอนุภาคทั้งสองพุ่งเข้าชนกันและเป็นการชนแบบยืดหยุ่นด้วยจากการคงตัวของโมเมนตัมและการคงตัวของพลังงานจลน์จะได้ว่า



รูปที่ 5.3: การชนกันแบบ 1 มิติของระบบสองอนุภาค

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (5.10)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (5.11)$$

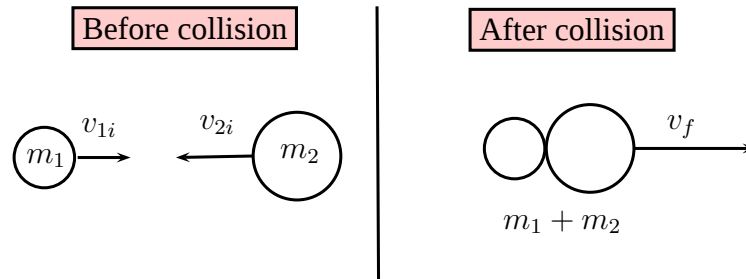
ในการคำนวณโดยใช้สมการข้างต้นจำเป็นต้องอย่างยิ่งที่จะต้องกำหนดเครื่องหมายให้กับความเร็วของวัตถุ โดยให้ความเร็วมีค่าเป็นบวกเมื่อเคลื่อนที่ไปทางขวามือ (+x) และมีค่าเป็นลบเมื่อเคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือ (-x) และจากสองสมการนี้ทำให้เราสามารถเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วต้นกับความเร็วปลายของวัตถุทั้งสองได้ดังนี้

$$v_{1f} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (5.12)$$

$$v_{2f} = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (5.13)$$

## 5.5 การชนแบบไม่ยืดหยุ่น

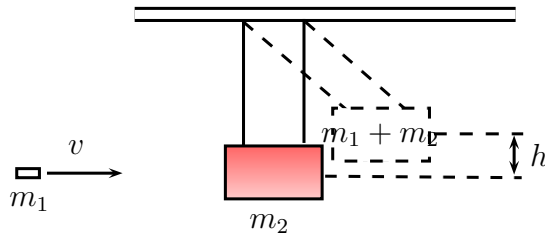
การชนของวัตถุซึ่งทำให้พลังงานจลน์รวมของระบบก่อนชนและหลังชนมีค่าไม่เท่ากัน แต่โมเมนตัมรวมยังคงที่ เรียกว่าการชนแบบไม่ยืดหยุ่น (Inelastic collision) ในการเฉพาะที่วัตถุชนกันแล้วมวลทั้งสองติดกันไปดังรูป 5.4 เราเรียกว่า การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ (Perfectly inelastic collision) และผลจากการชนดังกล่าวทำให้เราหาค่าความเร็วหลังการชนได้ดังนี้



รูปที่ 5.4: การชนกันแบบ 1 มิติของระบบสองอนุภาคแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์

$$\begin{aligned}
 p_{1i} + p_{2i} &= p_f \\
 m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= (m_1 + m_2) v_f \\
 v_f &= \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

**ตัวอย่างที่ 2** ลูกปืนมวล  $m_1$  ถูกยิงออกไปในแนวระดับพุ่งเข้าชนกับแท่งไม้มวล  $m_2$  ที่แขวนอยู่นิ่งในแนวดิ่งด้วยเชือกมวลเบา ลูกปืนฝังเข้าไปในเนื้อไม้และแกว่งขึ้นไปที่ระดับความสูง  $h$  จากระดับเดิมดังรูป 5.5 จงหาความเร็วของลูกปืนก่อนชนกับแท่งไม้



รูปที่ 5.5: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 2

วิธีทำ เนื่องจากแท่งไม้ยังไม่อยู่นิ่งตอนเริ่มต้น  $v_{2i} = 0$  และลูกปืนมีความเร็ว  $v_{1i} = v$  หลังจากชนมวลทั้งสองติดกันไปด้วยความเร็ว  $v_f$  ดังนั้นจากหลักการคงตัวของโมเมนตัมจะได้ว่า

$$\begin{aligned} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= (m_1 + m_2) v_f \\ m_1 v + 0 &= (m_1 + m_2) v_f \\ v_f &= \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

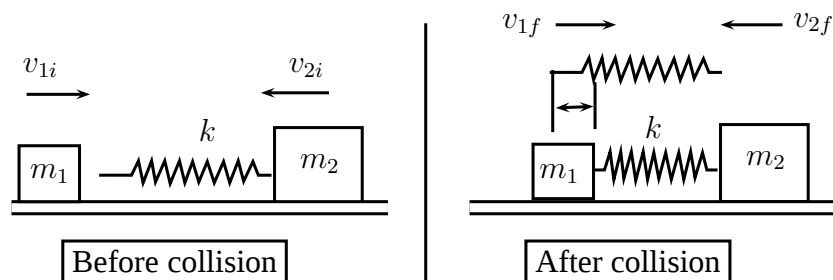
หลังจากชนแล้วแท่งไม้แกว่งขึ้นไปในระดับความสูง  $h$  จากระดับเดิม โดยใช้หลักการคงตัวของพลังงานเชิงกลจะได้ว่า

$$\begin{aligned} K_i + U_i &= K_f + U_f \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 + 0 &= 0 + (m_1 + m_2)gh \\ \frac{1}{2}v_f^2 &= \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v^2}{(m_1 + m_2)^2} = gh \\ v^2 &= 2 \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1^2} gh \\ v &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

ตอบ ความเร็วของลูกปืนก่อนชนมีค่าเท่ากับ  $\frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$

ตัวอย่างที่ 3 กล้องวัตถุมวล  $m_1 = 1.6 \text{ kg}$  เคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็ว  $4 \text{ m/s}$  บนพื้นราบลื่นและพุ่งเข้าชนกับสปริงที่ยึดกับมวล  $m_2 = 2.1 \text{ kg}$  ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปทางซ้ายด้วยความเร็ว  $2.5 \text{ m/s}$  ดังรูป 5.6 ถ้าค่าคงที่ของสปริง  $k = 600 \text{ N/m}$  จงหา

- (ก) ความเร็วของมวล  $m_2$  ขณะที่มวล  $m_1$  มีความเร็ว  $3.0 \text{ m/s}$  ไปทางขวาหลังการชน  
(ข) ระยะที่สปริงถูกอัดขณะเกิดการชน



รูปที่ 5.6: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 3

วิธีทำ (ก) โดยใช้หลักการคงตัวของโมเมนตัมจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 p_{1i} + p_{2i} &= p_{1f} + p_{2f} \\
 m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\
 (1.6)(4.0) + (2.1)(-2.5) &= (1.6)(3.0) + (2.1)v_{2f} \\
 v_{2f} &= -1.74 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

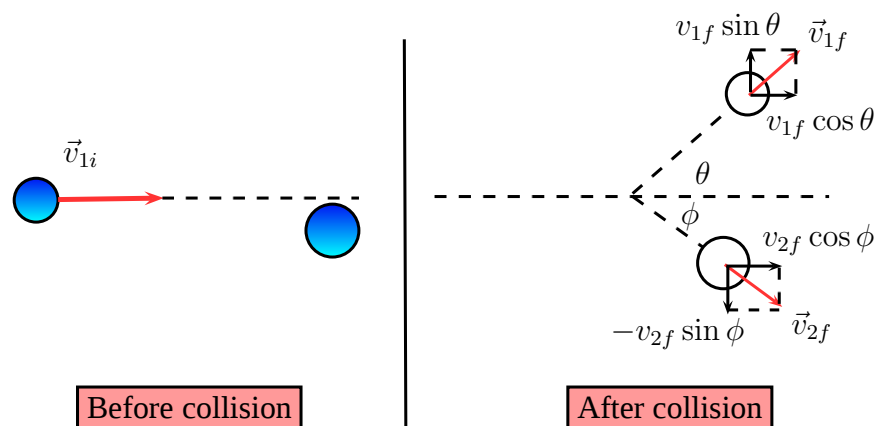
(ข) โดยใช้หลักการคงตัวของพลังงานเชิงกลจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 K_i + U_i &= K_f + U_f \\
 \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 + 0 &= \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\
 x &= 0.173 \text{ m}
 \end{aligned}$$

ตอบ ความเร็วของวัตถุมวล  $m_2$  คือ 1.74 m/s เคลื่อนที่ไปทาง  $-x$  และระยะที่สปริงถูกอัดหลังการชนเท่ากับ 0.173 เมตร

## 5.6 การชนแบบ 2 มิติ

พิจารณาการชนของอนุภาคในระนาบ  $xy$  โดยที่เริ่มต้นอนุภาคมวล  $m_2$  หยุดนิ่ง ขณะที่มวล  $m_1$  เคลื่อนที่ด้วยความเร็วพุ่งเข้าชนดังรูป 5.7 โดยใช้หลักการคงตัวของโมเมนตัมตามแกน  $x$  และ  $y$  ทำให้ได้



รูปที่ 5.7: การชนในแบบ 2 มิติของระบบ 2 อนุภาค

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \quad (5.15)$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy} \quad (5.16)$$

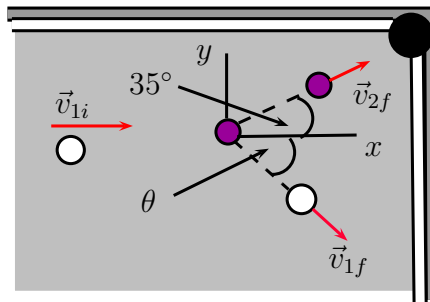
$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi \quad (5.17)$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \phi \quad (5.18)$$

ถ้าหากการชนเป็นแบบยืดหยุ่นจะได้ว่า พลังงานจลน์ก่อนและหลังการชนจะมีค่าเท่ากัน นั่นคือ

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (5.19)$$

**ตัวอย่างที่ 4** นักกีฬาคนหนึ่งแทงลูกบิลเลียดให้เคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว  $v_{1i}$  ในทิศ +x พุ่งเข้าชนลูกบิลเลียดอีกลูกหนึ่งซึ่งหยุดนิ่ง หลังจากการชนลูกบิลเลียดทั้งสองกระเด็นทำมุมกับแนวแกน+x เป็นมุมดังแสดงในรูป 5.8 สมมติในการชนนี้เป็นแบบยืดหยุ่น จงคำนวณหาค่ามุม  $\theta$



รูปที่ 5.8: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 4

**วิธีทำ** จากหลักการคงตัวของโมเมนตัม ทำให้ได้

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$$

และพลังงานจลน์ของระบบก่อนและหลังการชนคือ

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

เนื่องจาก  $v_{1i}^2 = \vec{v}_{1i} \cdot \vec{v}_{1i} = (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}) \cdot (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}) = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f}$  เพราะว่ามุมระหว่างเวกเตอร์  $\vec{v}_{1f}$  กับ  $\vec{v}_{2f}$  คือ  $\theta + 35^\circ$  ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} &= v_{1f}v_{2f} \cos(\theta + 35) \\ v_{1i}^2 &= v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2v_{1f}v_{2f} \cos(\theta + 35)\end{aligned}$$

จากสมการข้างต้นทำให้เราสามารถคำนวณหาค่ามุม  $\theta$  ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}0 &= 2v_{1f}v_{2f} \cos(\theta + 35) \\ 0 &= \cos(\theta + 35) \\ \theta + 35 &= 90 \\ \theta &= 90 - 35 = 55^\circ\end{aligned}$$

ตอบ ลูกบิลเลียดทั้งสองทำมุมกัน  $55$  องศา หลังจากการชน

## 5.7 จุดศูนย์กลางมวล

พิจารณาในกรณีระบบที่มี  $n$  อนุภาค การหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลคำนวณได้จาก

$$x_C M = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} \quad (5.20)$$

$$y_C M = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M} \quad (5.21)$$

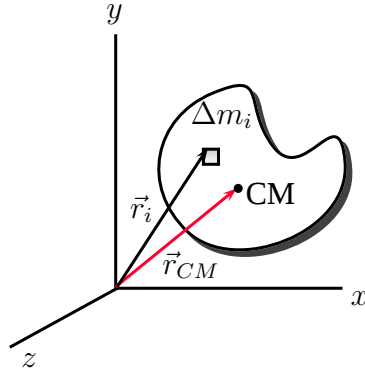
$$z_C M = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M} \quad (5.22)$$

ในกรณีของระบบอนุภาคที่กระจายอย่างต่อเนื่องดังรูป 5.9 จุดศูนย์กลางมวลจะคำนวณได้จากการหาการอินทิเกรตดังนี้

$$x_{CM} = \frac{\int x dm}{M} \quad (5.23)$$

$$y_{CM} = \frac{\int y dm}{M} \quad (5.24)$$

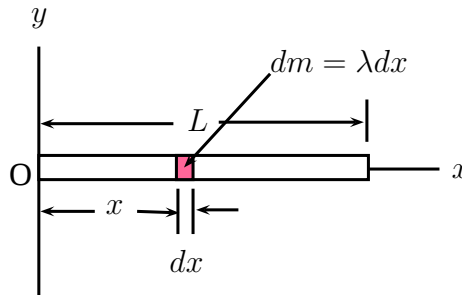
$$z_{CM} = \frac{\int z dm}{M} \quad (5.25)$$



รูปที่ 5.9: การหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาคที่มีการกระจายอย่างต่อเนื่อง

เมื่อ  $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$  คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งของอนุภาค  $i$  ที่มีมวล  $\Delta m_i$  และ  $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{x} + y_{CM}\hat{y} + z_{CM}\hat{z}$  คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล

**ตัวอย่างที่ 5** จากรูป 5.10 จงคำนวณหาจุดศูนย์กลางมวลของแท่งไม้ยาวสม่ำเสมอ  $L$  และมวล  $M$



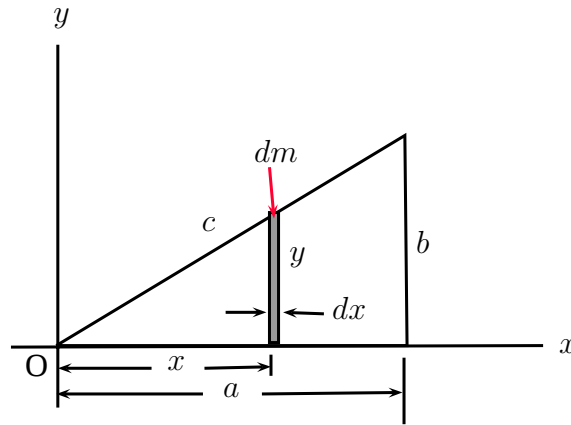
รูปที่ 5.10: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 5

**วิธีทำ** เนื่องจากแท่งไม้วางตามแกน  $x$  ดังนั้น  $y_{CM} = 0$  และ  $z_{CM} = 0$  ถ้ากำหนดให้  $\lambda$  คือ ความหนาแน่นมวลต่อความยาวจะได้ว่า  $\lambda = \frac{M}{L}$  พิจารณาความยาวส่วนเล็กๆ  $dx$  ซึ่งมีมวล  $dm = \lambda dx$  จากนิยามของจุดศูนย์กลางมวล ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L \lambda x dx \\ &= \frac{\lambda}{M} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} \\ x_{CM} &= \frac{L^2}{2M} \left( \frac{M}{L} \right) = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

ตอบ จุดศูนย์กลางมวลของแท่งวัตถุคือ  $\frac{L}{2}$

**ตัวอย่างที่ 6** จงคำนวณหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมวล  $M$  ดังรูป 5.11



รูปที่ 5.11: สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 6

**วิธีทำ** เริ่มจากพิจารณาวัตถุส่วนเล็กๆ ซึ่งมีขนาดเป็น  $dx$  มวล  $dm$  โดยที่

$$dm = \frac{M}{\frac{1}{2}ab}(ydx) = \left(\frac{2M}{ab}\right)ydx$$

ดังนั้นพิภพตามแกน  $x$  ของจุดศูนย์กลางมวล คือ

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^a x \left(\frac{2M}{ab}\right) y dx \\ &= \frac{2}{ab} \int_0^a xy dx \end{aligned}$$

เพื่อทำการคำนวณค่าอินทิเกรตจำเป็นต้องแสดงค่า  $y$  ในเทอมของตัวแปร  $x$  โดยพิจารณาจากความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายจะได้ว่า

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \implies y = \frac{b}{a}x$$

แทนค่าของ  $y$  ลงในสมการข้างต้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{2}{ab} \int_0^a x \left(\frac{b}{a}\right) x dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx \\ &= \frac{2}{a^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a \\ x_{CM} &= \frac{2}{3}a \end{aligned}$$

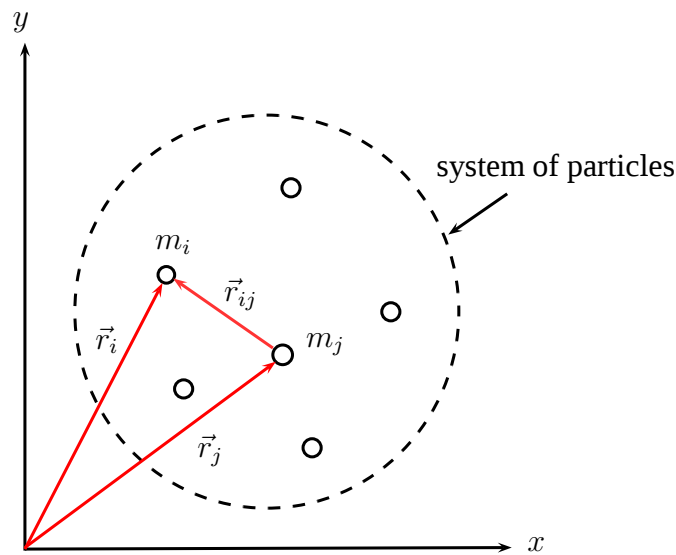
โดยการคำนวณในแบบเดียวกันเราจะได้พิกัดของจุดศูนย์กลางมวลตามแกน  $y$  ดังนี้

$$y_{CM} = \frac{1}{3}b$$

ตอบ จุดศูนย์กลางมวลของรูปสามเหลี่ยมดังกล่าวคือ  $x_{CM} = \frac{2}{3}a$  และ  $y_{CM} = \frac{1}{3}b$

## 5.8 การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค

ระบบอนุภาค (system of particles) หมายถึง กลุ่มของอนุภาคที่มีจำนวนตั้งแต่ 2 อนุภาคขึ้นไป การศึกษาการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคโดยใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันสำหรับแต่ละอนุภาคนั้นค่อนข้างยุ่งยาก ดังนั้นเราจำเป็นต้องหาจุดที่เป็นตัวแทนของอนุภาคทั้งหมด ซึ่งเราเรียกว่า จุดศูนย์กลางมวล ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา สำหรับในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคซึ่งจะเกี่ยวข้องกับจุดศูนย์กลางมวล พิจารณาอนุภาค



รูปที่ 5.12: เวกเตอร์บอกตำแหน่งของอนุภาค  $i$  และ  $j$  ในระบบอนุภาคซึ่งวัดในกรอบอ้างอิง  $xy$

มวล  $m_i$  ซึ่งเป็นอนุภาคหนึ่งในระบบอนุภาค ดังแสดงในรูป 5.12 จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i \quad (5.26)$$

เมื่อให้  $\vec{F}_i$  คือ แรงลัพธ์เนื่องจากแรงจากอนุภาคอื่นๆทั้งหมดกระทำต่ออนุภาคมวล  $m_i$  และ  $\vec{a}_i$  คือ ความเร่งของอนุภาค  $m_i$  จากสมการ 5.26 ถ้าเราเขียนสำหรับอนุภาคทั้งหมดในระบบ

จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = M \vec{a}_{CM} \quad (5.27)$$

เมื่อ  $\vec{a}_{CM}$  คือ ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล เนื่องจากแรงทั้งหมดที่กระทำต่อระบบอนุภาค ประกอบด้วยแรงจากภายนอก และแรงภายในระบบ ดังนั้น เทอมทั้งซ้าย ของสมการ 5.27 เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i &= \sum_{i=1}^n (\vec{F}_{i,ext} + \vec{F}_{i,int}) \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,int} \\ &= \vec{F}_{ext} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{ij} \end{aligned}$$

เมื่อ  $\vec{F}_{i,ext}$  และ  $\vec{F}_{i,int}$  แทน แรงภายนอกทั้งหมดและแรงภายในทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคมวล  $m_i$  ส่วน  $\vec{F}_{ext}$  คือ แรงภายนอกทั้งหมดที่กระทำต่อระบบอนุภาคทั้งระบบ

สำหรับแรงภายในระบบ  $\vec{F}_{i,int}$  นั้นเกิดจากอนุภาคอื่นๆภายในระบบอนุภาคเดียวกัน กระทำต่ออนุภาคมวล  $m_i$  ซึ่ง  $\vec{F}_{ij}$  ก็คือแรงที่เกิดจากอนุภาคมวล  $m_j$  กระทำต่ออนุภาคมวล  $m_i$  ดังนั้น

$$\vec{F}_{i,int} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{ij} \quad (5.28)$$

เมื่อเรารวมแรงภายในระบบทั้งหมดเป็นคู่ๆ ตามกฎข้อที่ 3 ของนิวตัน  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$  ซึ่งมีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศตรงกันข้าม ดังนั้น แรงลัพธ์ภายในระบบจึงมีค่าเป็นศูนย์ และสมการ 5.26 เขียนใหม่ได้เป็น

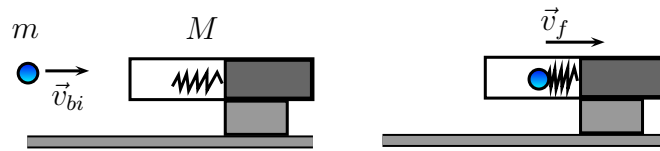
$$\vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{CM} \quad (5.29)$$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางมวลของระบบจะเคลื่อนที่เสมือนกับว่ามันเป็นอนุภาคหนึ่ง ที่มีมวลทั้งหมดเท่ากับมวลทั้งหมดของระบบอนุภาคในขณะที่ถูกแรงภายนอกกระทำ ในกรณีที่ไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อระบบ ( $\vec{F}_{ext} = 0$ ) และจากนิยาม  $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$  ดังนั้น จะได้ว่า โมเมนตัมของระบบอนุภาคจะมีค่าคงที่ เราเรียกระบบนี้ว่า ระบบโดดเดี่ยว (isolated system)

## 5.9 แบบฝึกหัด

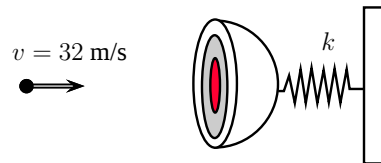
1. ลูกเบสบอลมวล 0.145 kg เคลื่อนที่ตามแนวแกน  $+x$  ด้วยความเร็ว 3.4 m/s และ ลูกเทนนิสมวล 0.057 kg เคลื่อนที่ตามแนว  $-x$  ด้วยความเร็ว 6.2 m/s จงคำนวณหา

ขนาดและทิศของโมเมนตัมรวมของระบบที่ประกอบไปด้วยลูกเบสบอลและลูกเทนนิส



รูปที่ 5.13: สำหรับโจทย์ข้อที่ 3

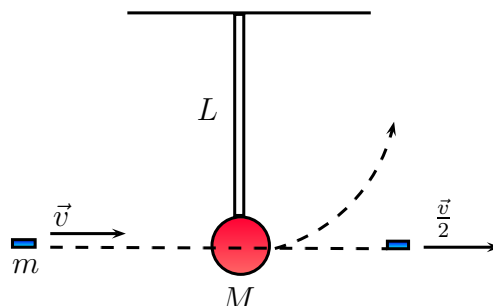
2. ลูกกอล์ฟมวล  $0.045 \text{ kg}$  ถูกตีด้วยไม้กอล์ฟจากจุดหยุดนิ่งจนมีความเร็ว  $40 \text{ m/s}$  กำหนดให้เวลาที่ไม้กอล์ฟสัมผัสลูกกอล์ฟเท่ากับ  $2 \text{ ms}$  จงคำนวณแรงเฉลี่ยที่เกิดขึ้นบนลูกกอล์ฟ



รูปที่ 5.14: สำหรับโจทย์ข้อที่ 5

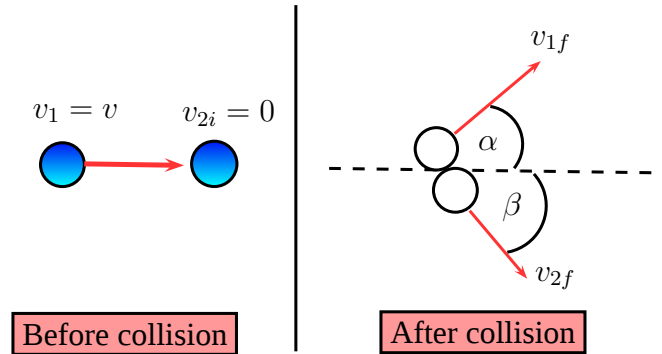
3. ลูกบอลมวล  $m = 50 \text{ g}$  ถูกยิงด้วยอัตราเร็ว  $v_{bi} = 25 \text{ m/s}$  เข้าไปภายในปืนสปริงมวล  $M = 250 \text{ g}$  ซึ่งกำลังอยู่นิ่งโดยลูกบอลจะติดอยู่ในกระบอกปืนที่ตำแหน่งกดสปริงมากที่สุดดังรูป 5.13 กำหนดให้ไม่ต้องพิจารณาพลังงานความร้อนที่เกิดขึ้นจากความเสียดทานระหว่างลูกบอลกับกระบอกปืน จงคำนวณหา

- อัตราเร็วของปืนสปริงหลังจากลูกบอลติดอยู่นิ่งภายในกระบอกปืน
- สัดส่วนระหว่างพลังงานที่สะสมในสปริงกับพลังงานจลน์เริ่มต้นของลูกบอล



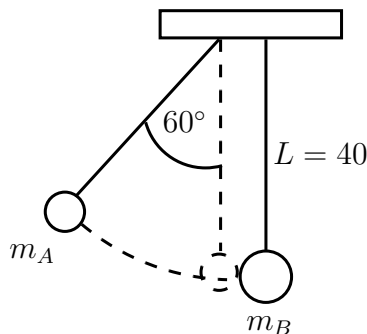
รูปที่ 5.15: สำหรับโจทย์ข้อที่ 6

4. ปืนกระบอกหนึ่งยิงกระสุนมวล 30 g ไปชนและฝังในกล่องมวล 1.5 kg ซึ่งวางอยู่นิ่งด้านหน้าปืน หากสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ระหว่างพื้นราบกับกล่องเท่ากับ 0.25 และภายหลังจากกระสุนชนกับกล่อง กล่องเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 10 m ก่อนจะหยุดนิ่ง จงคำนวณหาอัตราเร็วของกระสุน



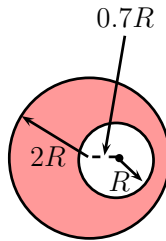
รูปที่ 5.16: สำหรับโจทย์ข้อที่ 7

5. ลูกดอกอันหนึ่งมวล 25 g ถูกปาไปที่เป้ามวล 1.6 kg ด้วยความเร็ว 32 m/s ดังรูป 5.14 ภายหลังจากการปาเป้าสปริงที่ติดอยู่ด้านหลังของเป้าจะเคลื่อนที่ถอยไปเป็นระยะ 2.4 cm จงคำนวณหาค่าคงตัว  $k$  ของสปริง กำหนดให้เป็นสปริงเชิงเส้นตามกฎของฮุก
6. กระสุนมวล  $m$  เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว  $v$  เข้าชนกับลูกตุ้มมวล  $M$  ที่แขวนด้วยแท่งวัตถุเบายาว  $L$  หลังจากชนกันกระสุนจะทะลุผ่านลูกตุ้มด้วยอัตราเร็ว  $v/2$  ดังรูป 5.15 จงคำนวณหาอัตราเร็ว  $v$  ที่น้อยที่สุดซึ่งเพียงพอที่จะทำให้ลูกตุ้มแกว่งเป็นวงกลมในแนวตั้งได้พอดี



รูปที่ 5.17: สำหรับโจทย์ข้อที่ 8

7. จงพิสูจน์ว่าภายหลังจากการชนแบบยืดหยุ่นของวัตถุสองอันที่มีมวลเท่ากันโดยวัตถุหนึ่งเคลื่อนที่เข้าชนอีกวัตถุหนึ่งที่เป็นเป้านิ่งดังรูป 5.16 แล้วจะมีมุมระหว่างความเร็วหลังชนของวัตถุทั้งสองเท่ากับ  $90^\circ$  เสมอ
8. วัตถุ A และวัตถุ B มีมวล  $m_A = 50 \text{ g}$  และ  $m_B = 70 \text{ g}$  ถูกแขวนไว้ด้วยเชือกดังรูป 5.17 วัตถุ A ถูกดึงให้เอียงทำมุม  $60^\circ$  กับแนวดิ่งจากนั้นปล่อยให้เคลื่อนที่ กำหนดให้เป็นการชนแบบยืดหยุ่น จงหา
- ความเร็วของวัตถุ A ก่อนชนกับวัตถุ B
  - ความเร็วของวัตถุทั้งสองหลังชน
  - ความสูงที่วัตถุแต่ละอันสามารถเคลื่อนที่ได้หลังจากชนกัน



รูปที่ 5.18: สำหรับโจทย์ข้อที่ 10

9. โมเลกุลของน้ำประกอบด้วยออกซิเจน 1 อะตอม และไฮโดรเจน 2 อะตอมยึดกันด้วยพันธะเคมีโดยมีมุมระหว่างพันธะทั้งสอง  $106^\circ$  ถ้าความยาวของพันธะเท่ากับ  $0.100$  นาโนเมตรจงหาว่าจุดศูนย์กลางมวลของโมเลกุลนี้อยู่ที่ตำแหน่งไหน
10. แผ่นวงกลมสม่ำเสมอรัศมี  $2R$  ถูกเจาะออกเป็นรูปร่างกลมขนาดเล็กรัศมี  $R$  โดยจุดศูนย์กลางของวงกลมขนาดเล็กที่เจาะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของแผ่นวงกลมเท่ากับ  $0.70R$  ดังรูป 5.18 จงคำนวณจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นวงกลมรัศมี  $2R$  ที่ถูกเจาะนี้