

บทที่ 3 งานและพลังงาน (ต่อ)

พลังงานศักย์และการอนุรักษ์พลังงาน

- พลังงานศักย์
- แรงอนุรักษ์และแรงไม่อนุรักษ์
- แรงอนุรักษ์และพลังงานศักย์
- การอนุรักษ์พลังงานกล
- งานเนื่องจากแรงไม่อนุรักษ์

พลังงานศักย์โน้มถ่วง

2

- พลังงานศักย์ (**potential energy: U**) คือ พลังงานที่เกี่ยวข้องกับระบบ (**system**) ของวัตถุ
- ระบบ อาจจะประกอบด้วยสองหรือมากกว่าสองวัตถุซึ่งออกแรงกระทำต่อกันและกัน
- เมื่อวัตถุที่ประกอบขึ้นมาเป็นระบบมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง พลังงานศักย์ของระบบจะเปลี่ยนแปลงด้วย
- พลังงานศักย์โน้มถ่วง (**gravitational potential energy: U_g**) คือ พลังงานศักย์ที่เกิดจากแรงดึงดูดของโลกกระทำกับวัตถุใดๆ ที่ระยะความสูง y เติบโตเทียบกับพื้นโลก นั่นคือ

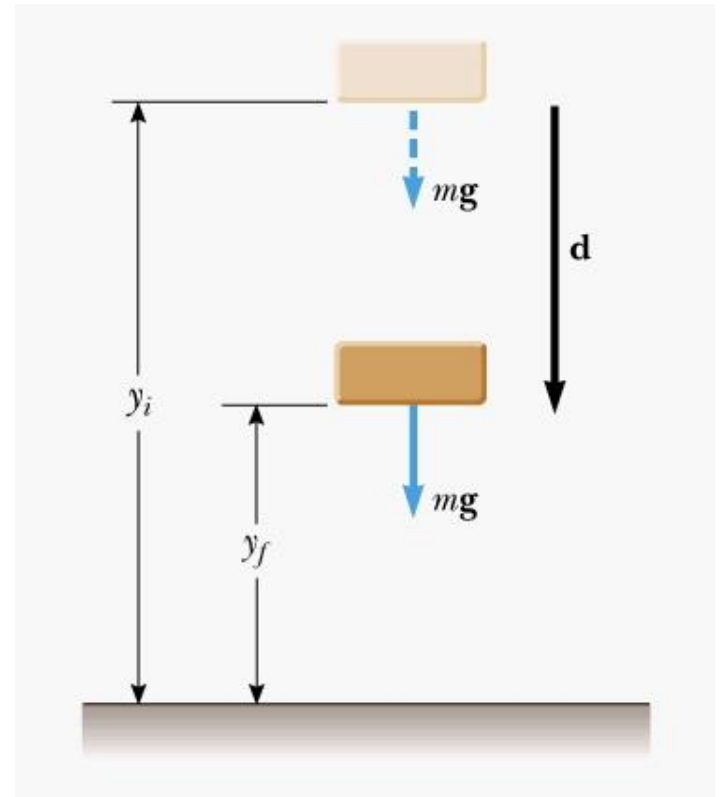
$$U_g = mgy \quad (3.13)$$

พลังงานศักย์โน้มถ่วง (ต่อ)

3

- พลังงานงานศักย์โน้มถ่วง เป็นพลังงานศักย์ของระบบของวัตถุกับโลก
- พลังงานศักย์ของระบบจะเปลี่ยนเป็นพลังงานจลน์โดยอาศัยแรงโน้มถ่วงของโลก แต่เนื่องจากมวลของโลกมากกว่ามวลวัตถุมาก ๆ ดังนั้นพลังงานจลน์ของระบบ ก็คือพลังงานจลน์ของวัตถุที่ตกลงบนพื้นโลก
- งานที่กระทำต่อวัตถุโดยแรงโน้มถ่วงของโลก คือ

$$W_g = (m\vec{g}) \cdot \vec{d} = (-mg\hat{j})(y_f - y_i)\hat{j} = mgy_i - mgy_f = U_i - U_f$$
$$W_g = -(U_f - U_i) = -\Delta U_g \quad (3.14)$$



พลังงานศักย์โน้มถ่วง (ต่อ)

4

- งานที่ทำโดยแรงโน้มถ่วงนี้มีค่าเท่ากับค่าลบของการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ ซึ่งหาได้จากผลต่างระหว่างพลังงานศักย์ของวัตถุที่ตำแหน่งเริ่มต้นกับพลังงานศักย์ของวัตถุที่ตำแหน่งสุดท้าย
- งานของแรงโน้มถ่วงนี้จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งตอนเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายเท่านั้น
- การเลือกจุดเริ่มต้นของระบบพิกัดสามารถเลือกตำแหน่งใด ๆ ก็ได้เพื่อความสะดวกในการคำนวณ

พลังงานศักย์ยืดหยุ่น

5

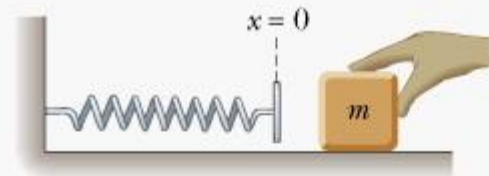
□ พลังงานศักย์ยืดหยุ่น (elastic potential energy: U_s)

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2 \quad (3.15)$$

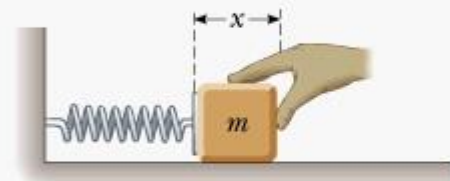
$$W_s = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2 = U_{s,i} - U_{s,f}$$

$$W_s = -(U_{s,f} - U_{s,i}) = -\Delta U_s \quad (3.16)$$

การเคลื่อนที่ของมวลยืดติดกับสปริง

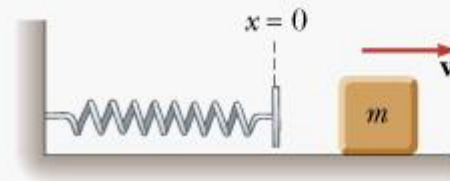


(a)



(b)

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2$$
$$K_i = 0$$



(c)

$$U_s = 0$$
$$K_f = \frac{1}{2} mv^2$$

แรงแบบอนุรักษ์และแบบไม่อนุรักษ์

6

แรงอนุรักษ์ (conservative force)

- งานที่ทำโดยแรงอนุรักษ์ในการเคลื่อนที่ของวัตถุระหว่างสองตำแหน่งใด ๆ ไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่แต่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งเริ่มต้นกับตำแหน่งสุดท้าย
- งานที่ทำโดยแรงอนุรักษ์ในการทำให้วัตถุเคลื่อนที่ตามเส้นทางปิด (closed path) มีค่าเป็นศูนย์
- ตัวอย่างเช่น แรงโน้มถ่วงของโลก แรงดึงดูดของสปริง

แรงไม่อนุรักษ์ (non-conservative force)

- แรงที่ทำให้มีการเปลี่ยนแปลงพลังงานเชิงกล (mechanical energy: E) ซึ่งพลังงานเชิงกลคือ ผลรวมของพลังงานจลน์กับพลังงานศักย์
- ตัวอย่างเช่น แรงเสียดทาน

การอนุรักษ์ของพลังงานเชิงกล

7

□ หลักการคงตัวของพลังงานเชิงกล (**principle of conservation of mechanical energy**)

“พลังงานเชิงกลทั้งหมดของระบบอันหนึ่งยังคงมีค่าคงที่ในระบบของวัตถุที่อยู่โดดเดี่ยวใดๆ ที่ซึ่งวัตถุเหล่านั้นมีอันตรกิริยาต่อกันด้วยแรงอนุรักษ์”

□ พลังงานเชิงกล คือ

$$E = K + U \quad (3.17)$$

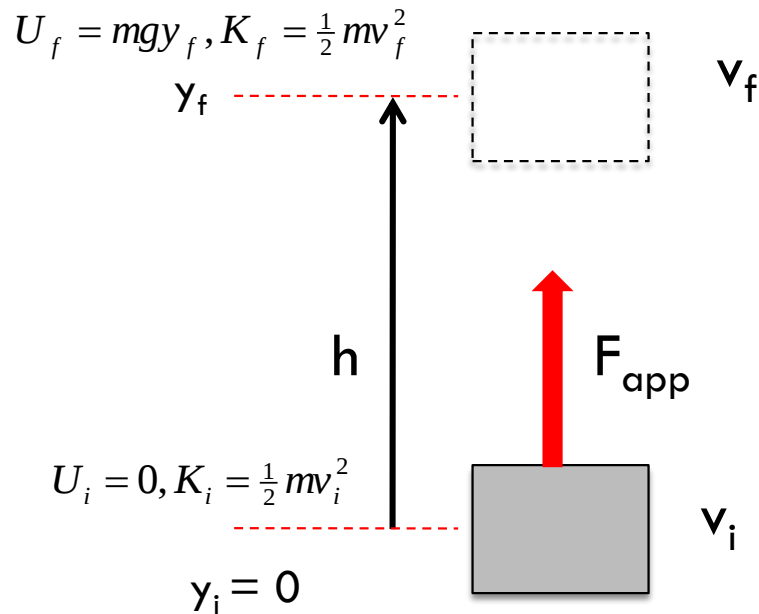
□ การคงตัวของพลังงานเชิงกล คือ

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ K_i + U_i &= K_f + U_f \end{aligned} \quad (3.18)$$

งานเนื่องจากแรงไม่อนุรักษ์

8

□ งานเนื่องจากมีแรงกระทำ (Applied Force)



เมื่อออกแรงยกวัตถุขึ้นในแนวตั้งงานที่ได้
เนื่องจากแรงนี้คือ

$$W_{app} = F_{app}h$$

งานของแรงโน้มถ่วงคือ

$$W_g = -mgh$$

จากทฤษฎีงาน-พลังงานจลน์

$$W = W_{app} + W_g = \Delta K$$

$$W_g = -\Delta U$$

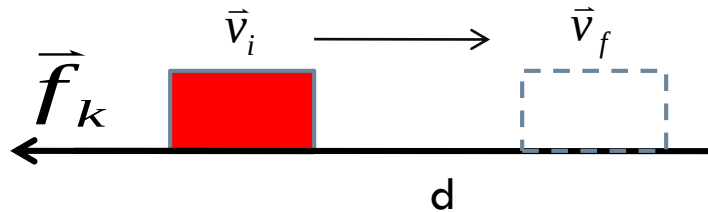
$$W_{app} = \Delta K + \Delta U \quad (3.19)$$

งานเนื่องจากแรงไม่อนุรักษ์ (ต่อ)

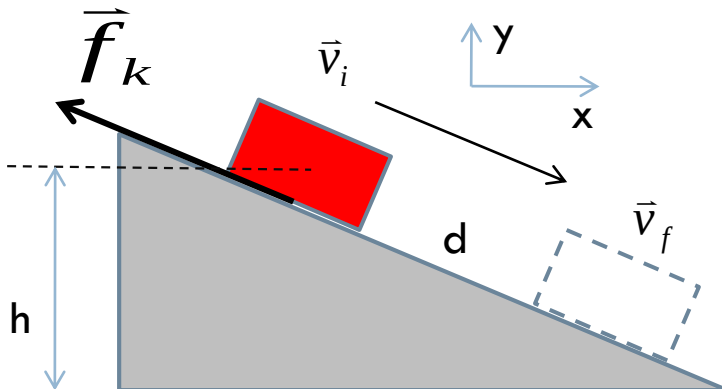
9

□ งานเนื่องจากมีแรงเสียดทาน

การเคลื่อนที่บนพื้นราบ



การเคลื่อนที่บนพื้นเอียง



$$W_f = -f_k d$$

$$W_f = \Delta K = K_f - K_i$$

$$-f_k d = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \quad (3.20)$$

$$W_f = -f_k d$$

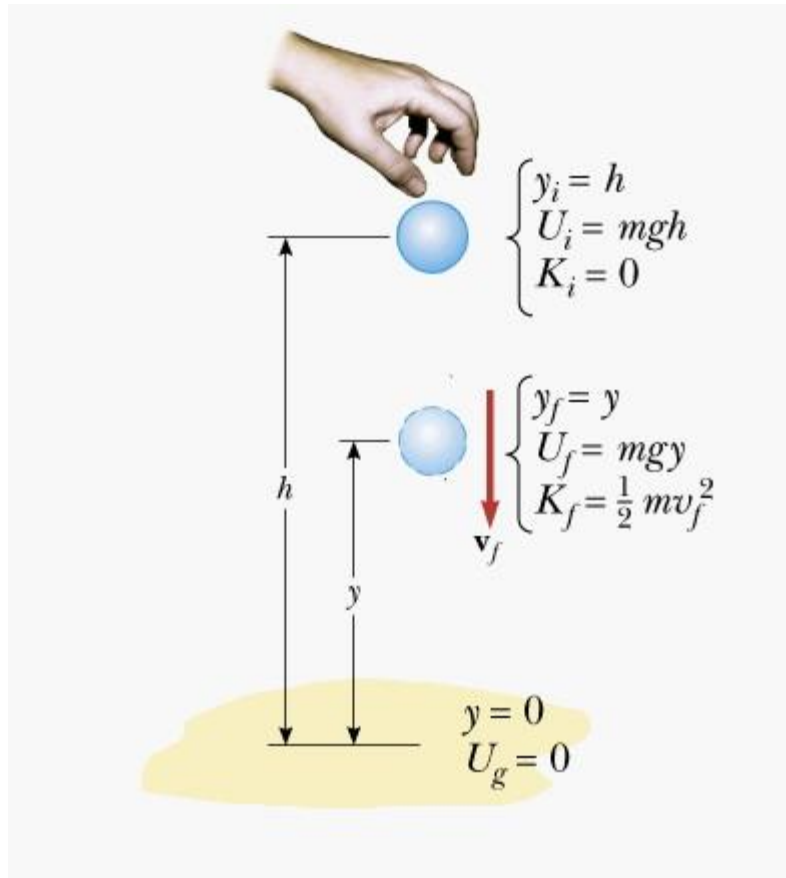
$$W_g = -mg(y_f - y_i) = -\Delta U = mgh$$

$$W_f + W_g = \Delta K$$

$$W_f - \Delta U = \Delta K \Rightarrow W_f = \Delta K + \Delta U = \Delta E$$

$$-f_k d = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 + mgh \quad (3.20)$$

ตัวอย่างที่ 4 ลูกบอลมวล m ถูกปล่อยที่ระดับความสูง h จากพื้นดิน ถ้าไม่คิดแรงต้านของอากาศ จงคำนวณหาความเร็วของลูกบอลที่ระดับความสูง y จากพื้นดิน



จากหลักการคงตัวของพลังงานเชิงกล

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy$$

$$v_f^2 = 2g(h - y)$$

$$v_f = \sqrt{2g(h - y)}$$

ตัวอย่างที่ 5 ลูกตุ้มนาฬิกามวล m ผูกติดกับเชือกมวลเบาที่มีความยาว L ลูกตุ้มนาฬิกาถูกปล่อยจากตำแหน่งหยุดนิ่งเมื่อเส้นเชือกทำมุม θ_A กับแนวตั้ง ดังรูป ถ้าไม่คิดแรงเสียดทานที่จุด P จงคำนวณหาความเร็วของลูกตุ้มนาฬิกาและแรงตึงในเส้นเชือกขณะที่อยู่ตำแหน่งต่ำสุด

โดยเลือกให้จุดเริ่มต้นของระบบพิกัด (x, y) อยู่ที่จุด P ทำให้ได้

$$y_A = -L \cos \theta_A \quad ; \quad y_B = -L$$

$$U_A = -mgy_A = -mgL \cos \theta_A$$

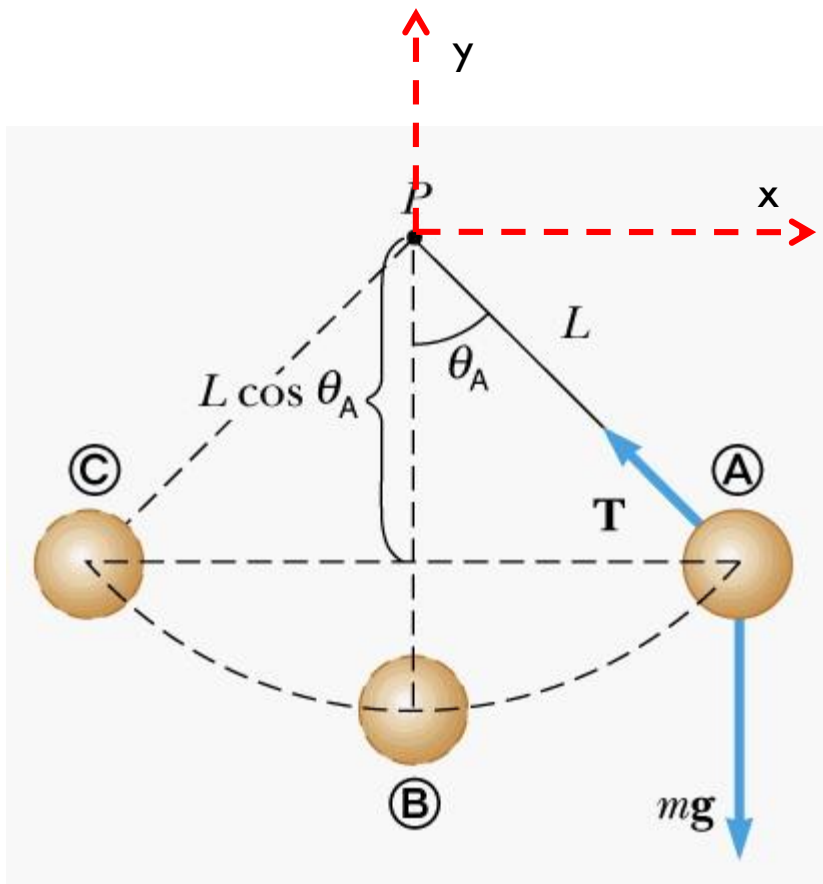
$$U_B = -mgy_B = -mgL$$

จากหลักการคงตัวของพลังงานเชิงกล

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

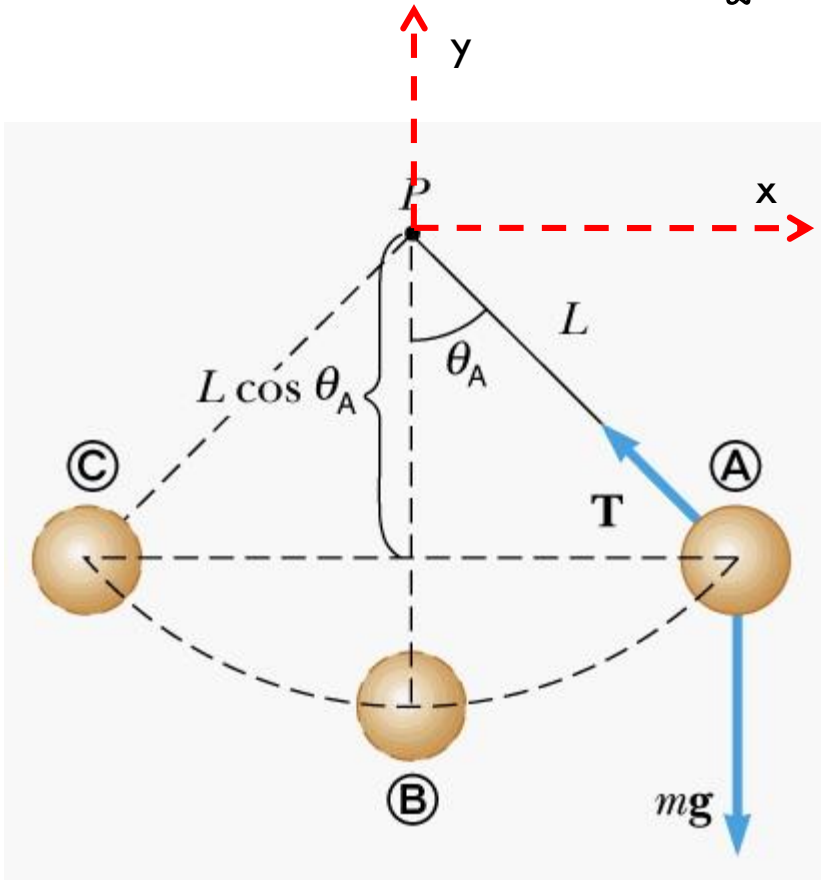
$$0 - mgL \cos \theta_A = \frac{1}{2} mv_B^2 - mgL$$

$$v_B = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_A)}$$



ตัวอย่างที่ 4 (ต่อ)

แรงดึงที่ตำแหน่งต่ำสุดหาได้จากการประยุกต์
กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่ 2

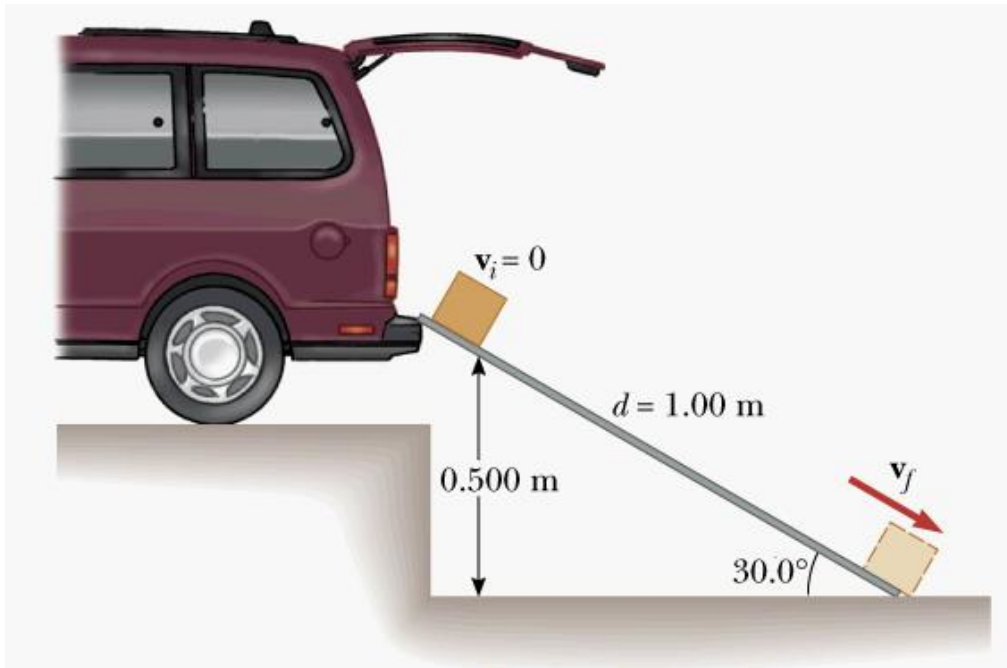


$$\sum F_r = T_B - mg = ma_r = m \frac{v_B^2}{L}$$

$$T_B = mg + 2mg(1 - \cos \theta_A)$$

$$T_B = mg(3 - 2 \cos \theta_A)$$

ตัวอย่างที่ 6 กล่องมวล **3 kg** ไถลตามพื้นเอียงที่มีความยาว **1.00 m** กล่องเริ่มเคลื่อนที่จากตำแหน่งหยุดนิ่งดังรูป แรงเสียดทานระหว่างการเคลื่อนที่มีค่าคงที่เท่ากับ **5 N** จงคำนวณหาอัตราเร็วของกล่องใบนี้ที่ตำแหน่งด้านล่าง



$$E_f - E_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgy_i = -f_k d$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = 14.7 - 5 = 9.7$$

$$v_f^2 = \frac{(2)(9.7)}{3} = 6.47 \text{ m}^2 / \text{s}^2 \Rightarrow v_f = 2.54 \text{ m/s}$$

พลังงานเชิงกลที่ตำแหน่งเริ่มต้น

$$E_i = K_i + U_i = 0 + U_i = mgy_i$$

$$E_i = (3)(9.8)(0.5) = 14.7 \text{ J}$$

พลังงานเชิงกลที่ตำแหน่งสุดท้าย

$$E_f = K_f + U_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

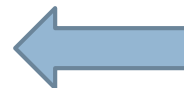
เนื่องจากมีแรงเสียดทานกระทำต่อวัตถุในขณะการเคลื่อนที่ทำให้

$$E_i \neq E_f$$

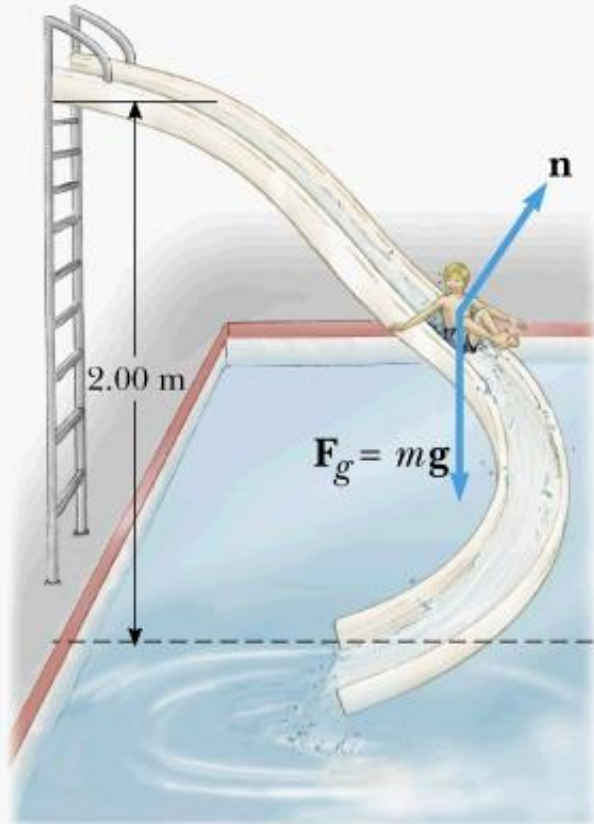
$$E_i + \Delta E = E_f$$

$$\Delta E = W_f = -f_k d$$

$$\Delta E = -(5)(1) = -5 \text{ J}$$



ตัวอย่างที่ 7 เด็กชายมวล m ไถลตามรางโค้งที่ระดับความสูงจากพื้น 2 m ดังรูป เด็กชายเริ่มจากตำแหน่งหยุดนิ่งด้านบนของราง จงหาอัตราเร็วของเด็กชายขณะที่ลงมาอยู่ที่ขอบรางด้านล่าง เมื่อไม่คิดแรงเสียดทาน



เมื่อไม่มีแรงเสียดทาน จะได้ว่าจากหลักการคงตัวของพลังงานเชิงกล

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)(9.8)(2)} = 6.26\text{ m/s}$$

ถ้าหากมีแรงเสียดทานกระทำขณะเคลื่อนที่ จงคำนวณหาพลังงานที่สูญเสียไป ให้ความเร็ว $v_f = 3.0\text{ m/s}$; $m = 20.0\text{ kg}$

$$\Delta E = E_f - E_i = (K_f + U_f) - (K_i + U_i)$$

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}mv_f^2 + 0\right) - (0 + mgh)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}(20)(3)^2 - (20)(9.8)(2) = -302\text{ J}$$

ตัวอย่างที่ 8 นักสกีเริ่มเคลื่อนที่จากหยุดหนึ่งที่ตำแหน่งด้านบนบนของพื้นเอียงที่มีความสูงจากพื้นด้านล่าง **20 m** โดยที่พื้นผิวเอียงนี้ไม่มีความเสียดทาน ส่วนที่ผิวด้านล่างมีความเสียดทานระหว่างรองเท้าของนักสกีกับพื้นผิวหิมะ โดยสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์คือ **0.21** ดังรูป จงหาระยะทางที่นักสกีเคลื่อนที่ไปได้ในแนวระดับจนกระทั่งหยุดนิ่ง

ที่จุด B $v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8)(20)} = 19.8 \text{ m/s}$

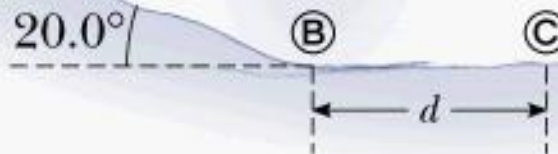
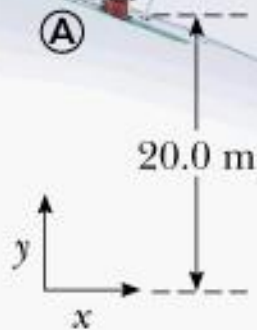
พิจารณาการเคลื่อนที่จากจุด B → C

$$\Delta E = E_C - E_B = -f_k d = -\mu_k n d = -\mu_k m g d$$

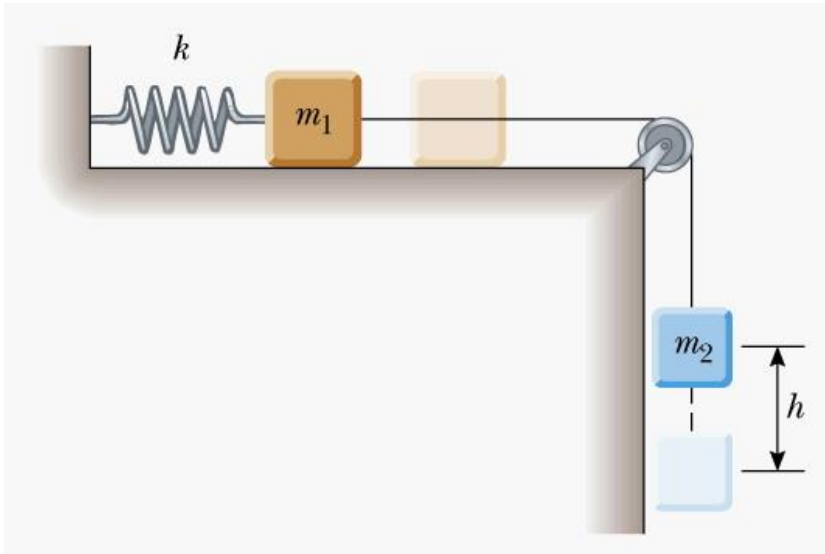
$$(K_C + U_C) - (K_B + U_B) = (0 + 0) - \left(\frac{1}{2} m v_B^2 + 0\right)$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = \mu_k m g d$$

$$d = \frac{v_B^2}{2\mu_k g} = \frac{(19.8)^2}{2(0.21)(9.8)} = 95.2 \text{ m}$$



ตัวอย่างที่ 9 มวล m_1 และ m_2 ผูกติดกันด้วยเชือกเบาและคล้องผ่านรอกที่ไม่มี ความฝืด วัตถุมวล m_1 ยึดติดกับสปริงและวางอยู่บนพื้นราบ ดังรูป เริ่มต้นระบบถูกปล่อยจากตำแหน่งหยุดนิ่งและ เมื่อวัตถุ m_2 เริ่มเคลื่อนที่เป็นระยะ h ทำให้สปริงถูกยืดออกจนกระทั่งระบบกับมาอยู่สภาวะหยุด นิ่งอีกครั้ง จงหาสัมประสิทธิ์เสียดทานจลน์ระหว่างผิววัตถุ m_1 กับพื้นราบ



$$\Delta K = 0 \Rightarrow \Delta E = \Delta U_g + \Delta U_s$$

$$\Delta U_g = U_{g,f} - U_{g,i} ; \Delta U_s = U_{s,f} - U_{s,i}$$

$$\Delta E = -f_k h = -\mu_k m_1 g h$$

$$\Delta U_g = 0 - m_2 g h$$

$$\Delta U_s = \frac{1}{2} k h^2 - 0$$

$$-\mu_k m_1 g h = -m_2 g h + \frac{1}{2} k h^2$$

$$\mu_k = \frac{m_2 g - \frac{1}{2} k h}{m_1 g}$$